Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 24 Maggio 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il "decisore"

- singolo obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi globali, allora $f(x^*) = f(\tilde{x})$ e non c'è alcun motivo (ragionevole) per preferire l'uno all'altro
- multi obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi di Pareto (globali), allora si ha necessariamente

$$\begin{array}{rcl} f(x^*) & \not\leq_P & f(\tilde{x}) \\ f(\tilde{x}) & \not\leq_P & f(x^*) \end{array}$$

cioè, $\tilde{x}$ e x^* sono (tra di loro) non dominati **MA** potrebbero esserci (validi) motivi per preferire l'uno all'altro

Nel caso multi obiettivo è usuale distinguere le seguenti due "figure"

1) ottimizzatore, chi (o cosa) è in grado di determinare una o più soluzione di Pareto per il problema
2) decisore, chi (o cosa) è in grado di scegliere (arbitrariamente) **una** soluzione di Pareto in un insieme di soluzione non dominate

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- *Metodi senza preferenze* nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- *Metodi a priori* nei quali il decisore specifica le sue preferenza prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore
- *Metodi a posteriori* nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore

Metodo "steepest descent"

$$\min \ (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$$
$$s.t. \ x \in \mathcal{F} \text{ convesso}$$

1) In x_h, calcola $\theta(x_h)$ e $d_h = y(x_h) - x_h$
2) Se $\theta(x_h) \geq -\epsilon$, allora **STOP** x_h Pareto
3) Calcola $\beta = 1/2^j$ con j più piccolo intero t.c.

$$f(x_h + \beta d_h) < f(x_h) + \gamma\beta\theta(x_h)$$

4) Definisci $x_{h+1} = x_h + \beta d_h$, $h \leftarrow h + 1$, vai al passo 1)

GOAL programming

Dopo aver calcolato il vettore ideale degli obiettivi z^{id} si definisce il problema

$$\begin{array}{l} \min_x \ \|z^{id} - f(x)\|_p \\ s.t. \ g(x) \leq 0 \end{array}$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma p di un vettore $(1 \leq p \leq \infty)$. In particolare, se $v \in \Re^k$

- $1 \leq p < \infty$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |v_i|^p \right)^{1/p}$
- $p = \infty$, $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_k|\}$

GOAL programming

Sono particolarmente interessanti le norme $p = 1$ e $p = \infty$ perchè consentono di ottenere problemi *lineari* partendo da problemi multiobiettivo lineari. Infatti, sia

$$\begin{aligned} &\min_x \; (c_1^\top x, c_2^\top x, \dots, c_k^\top x) \\ &s.t. \; Ax \leq b \end{aligned}$$

Otteniamo

- quando $p = 1$

$$\begin{aligned} &\min_x \; \sum_{i=1}^{k} \|c_i^\top x - z^{id}\| \\ &s.t. \; Ax \leq b \end{aligned}$$

- quando $p = \infty$

$$\begin{aligned} &\min_x \; \max_{i=1,\dots,k} \{\|c_i^\top x - z^{id}\|\} \\ &s.t. \; Ax \leq b \end{aligned}$$

GOAL programming

- $p = 1$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \ & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\ s.t. \ & \alpha_i \le c_i^\top x - z^{id} \le \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \le b \end{aligned}$$

- $p = \infty$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \ & \alpha \\ s.t. \ & \alpha \le c_i^\top x - z^{id} \le \alpha, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \le b \end{aligned}$$

Metodo dell'ord. lessicografico

Il decisiore specifica un ordinamento delle f.ob. Siano

$$f_1(x), \dots, f_k(x)$$

le f.ob. ordinate per "importanza" decrescente (dalla più importante alla meno importante)

Metodo dell'ord. lessicografico

- Passo 1

$$x^{*,1} = \begin{array}{l} \arg\min \ f_1(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \end{array}$$

- Passo 2

$$x^{*,2} = \begin{array}{l} \arg\min \ f_2(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \\ \quad f_1(x) \leq f_1(x^{*,1}) \end{array}$$

- Passo 3

$$x^{*,3} = \begin{array}{l} \arg\min \ f_3(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \\ \quad f_1(x) \leq f_1(x^{*,2}) \\ \quad f_2(x) \leq f_2(x^{*,2}) \end{array}$$

$\vdots$

- Passo h

$$x^{*,h} = \begin{array}{l} \arg\min \ f_h(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \\ \quad f_i(x) \leq f_i(x^{*,h-1}) \\ \quad i = 1, \dots, h-1 \end{array}$$

Metodo della "value function"

Il decisore specifica una funzione (value function)

$$U(z_1, \dots, z_k)$$

Si risolve il problema (singolo obiettivo)

$$\begin{array}{l} \min \;\; U(f_1(x), \dots, f_k(x)) \\ s.t. \; x \in \mathcal{F} \end{array}$$

Metodo dei pesi

0) Poni $X = \emptyset$

1) Scegli w_i, $i = 1, \ldots, k$ t.c.

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1 \quad w \geq 0$$

2) Determina

$$x^* = \begin{array}{l} \arg\min \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x) \\ s.t. \ x \in \mathcal{F} \end{array}$$

3) $X = X \cup \{x^*\}$, vai al passo 1)

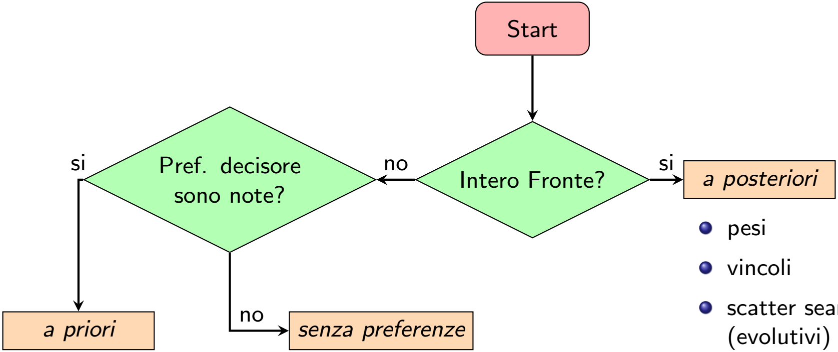
Metodo degli ϵ-vincoli

0) Poni $X = \emptyset$
1) Scegli $\ell \in \{1, \dots, k\}$ e ϵ_i, $i = 1, \dots, k$, $i \neq \ell$
2) Determina

$$x^* = \begin{array}{l} \arg\min \;\; f_\ell(x) \\ s.t. \;\; f_i(x) \leq \epsilon_i, \;\; i = 1, \dots, k, \;\; i \neq \ell \\ \qquad\quad x \in \mathcal{F} \end{array}$$

3) $X = X \cup \{x^*\}$, vai al passo 1)

Riassumendo ...



a priori

- value function
- lessicografico
- ⋮

senza preferenze

- steepest descent
- GOAL programming
- ⋮

a posteriori

- pesi
- vincoli
- scatter search (evolutivi)
- ⋮