Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2018-19 – 10 Giugno 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + x_3(t) + u_2(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + u_3(t)\end{aligned}$$

con $-1 \leq u_i(t) \leq 1$, $i = 1, 2, 3$,

- (**1 punto**) scrivere il problema di controllo ottimo che consente di trasferire lo stato iniziale $x(0) = (0, 0, 0)^\top$ nello stato finale $x(T) = (1, 1, 1)^\top$ con il minor tempo T possibile;
- (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità per il problema considerato;
- (**2 punti**) dire se può risultare $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0$, motivando adeguatamente la risposta;
- (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se invece di raggiungere lo stato finale $x(T) = (1, 1, 1)^\top$ ci si accontenta di minimizzare il quadrato della norma ℓ_2 di $x(T)$.

2. (**8 punti**) Con riferimento ad una generica iterazione del metodo di Nelder& Mead (cfr. figura 1), si consideri il seguente insieme di 4 punti

$$X_k = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- (**2 punti**) Assegnando (a vostra scelta) valori di funzione ai punti in X, calcolare il centroide x_c ed il punto di riflessione x_r.
- (**3 punti**) Assegnando (a vostra scelta) valori di funzione, eseguire una iterazione del metodo in modo che sia accettato il punto x_{ic} di "inner contraction" e determinare l'insieme X_{k+1}.
- (**3 punti**) Assegnando (a vostra scelta) valori di funzione, eseguire una iterazione del metodo in modo che sia accettato il punto x_e di "espansione" e determinare l'insieme X_{k+1}.

3. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$\begin{aligned}\min\ & -x^2 - 2xy - y^2\\ s.t.\ & x^2 \leq y + 1\\ & x^2 \leq -y + 1\end{aligned} \tag{1}$$

- (**2 punti**) rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema e stabilire se il medesimo ammette soluzione globale;
- (**6 punti**) determinare tutti i punti che soddisfano le condizioni necessarie di KKT.

4. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$\begin{aligned}\min\ & y;\ (x-2)^2 + y^2\\ s.t.\ & x^2 \leq y + 1\\ & x^2 \leq -y + 1\end{aligned}$$

- (**4 punti**) rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema e determinare il vettore ideale z^{id} degli obiettivi e le soluzioni ammissibili x_1^{id} e x_2^{id} che lo determinano;
- determinare almeno una soluzione (distinta dai punti x_1^{id} e x_2^{id}) utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Figure 1: Iterazione k del metodo di Nelder&Mead