Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2018-19 – 16 Settembre 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2\right) dt \\
& \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u_1(t) \\
& \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t) \\
& \dot{x}_3(t) = x_2(t)^2 + u_3(t) \\
& -1 \le u_1(t) \le 1 \\
& x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1
\end{aligned}
$$

   (a) (**3 punti**) scrivere le condizioni necessarie di ottimalità del principio del massimo;

   (b) (**2 punti**) elencare tutti i motivi per cui non si può ottenere il controllo ottimo come controreazione dello stato;

   (c) (**3 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo deve soddisfare la condizione

$$\int_0^T u_2(t)dt = \int_0^T u_3(t)dt;$$

   (d) (**1 punto**) tornando al problema iniziale e supponendo T libero, dire se può risultare $x_2(\hat{T}) = 1$, essendo $\hat{T}$ il valore ottimo di T.

2. (**8 punti**) Dato il problema

$$
\begin{aligned}
\min\ & x - y \\
s.t.\ & (x-1)^2 + y^2 \le 1 \quad (\lambda) \\
& (x-1)^2 - y = 0 \quad (\mu)
\end{aligned}
$$

   (a) (**2 punti**) Rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema ed almeno DUE curve di livello della funzione obiettivo.

   (b) (**4 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di KKT del problema con i rispettivi moltiplicatori.

   (c) (**2 punti**) Determinare analiticamente (quindi NON per via grafica) il o i punti di minimo globale del problema.

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$
\begin{aligned}
\min\ & x^2 + (y-1)^2;\ (x-1)^2 + y^2 \\
s.t.\ & 0 \le x \le 1 \\
& 0 \le y \le 1
\end{aligned}
$$

   (a) (**4 punti**) satibilire, motivando analiticamente la risposta, se nel punto $(1,\ 1)^\top$ esistono direzioni ammissibili che siano anche di discesa per entrambe le funzioni obiettivo;

   (b) (**4 punti**) Determinare almeno DUE punti di KKT (con rispettivi moltiplicatori) per i quali $I_0 = \emptyset$ ed il moltiplicatore associato alla prima f.ob. sia esattamente pari ad 1.

4. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$
\begin{aligned}
\min\ & x + y \\
s.t.\ & x \ge 0,\ y \ge 0
\end{aligned}
$$

   (a) (**4 punti**) Scrivere l'espressione di un funzione di Penalità sequenziale $P(x, y; \epsilon)$ e delle sue derivate rispetto alle variabili del problema.

   (b) (**4 punti**) Quando $\epsilon = 1$ determinare analiticamente un punto stazionario della funzione di penalità sequenziale $P(x, y; 1)$.