Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2018-19 – 15 Ottobre 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Il problema di controllo ottimo a tempo discreto

$$
\begin{aligned}
\min\ J &= \frac{1}{2}x_1(1000)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{999}\left[x_1(k)^2 + x_2(k)^2 + u_1(k)^2 + u_2(k)^2 + u_3(k)^2\right]\\
& x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + u_1(k)\\
& x_2(k+1) = x_1(k) + x_3(k) + u_2(k) \qquad\qquad k = 0,\dots,999\\
& x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + 2x_3(k) + u_3(k)\\
& x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1\\
& x_2(1000) = x_3(1000) = 0\\
& -1 \le u_1(k) \le 1, \qquad\qquad k = 0,\dots,999
\end{aligned}
$$

deriva dalla discretizzazione di un problema a tempo continuo con T fissato, con $N = T/\Delta T = 1000$ e $\Delta T = 1$.

   (a) (**2 punti**) Dire quali sono le dimensioni del problema discretizzato (numero di variabili e numero di vincoli).

   (b) (**3 punti**) Determinare il problema di controllo ottimo a tempo continuo che ha dato luogo alla discretizzazione.

   (c) (**3 punti**) Scrivere le condizioni di ottimalità del problema a tempo continuo;

2. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$
\begin{aligned}
&\min\ x_1 - x_2\\
&s.t.\ (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \le 4\\
&\qquad (x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 \le 4
\end{aligned}
$$

   (a) Rappresentare sul piano cartesiano la regione ammissibile del problema.

   (b) Motivare l'esistenza di una soluzione globale e determinarla per via grafica.

   (c) Studiare la regolarità dei punti ammissibili.

   (d) Determinare tutti i punti di KKT del problema.

3. (**8 punti**) Si consideri il seguente problema multiobiettivo:

$$
\begin{aligned}
&\min\ f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\\
&s.t.\ x \in \mathcal{F}
\end{aligned}
\tag{MOP}
$$

con $\mathcal{F}$ sottoinsieme convesso compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

   - Dire, motivando la risposta, se il Problema (MOP) può avere ottimi deboli di Pareto che non sono ottimi di Pareto.
   - Dire, motivando la risposta, se il problema (MOP) può avere ottimi di Pareto che non sono ottimi deboli di Pareto.
   - Sia $x^{*,1}$ tale che
   $$\{x^{*,1}\} = \arg\operatorname{glob}\min_{x\in\mathcal{F}} f_1(x).$$
   Dire, motivando la risposta, se il punto $x^{*,1}$ è anche ottimo di Pareto del Problema (MOP).
   - Sia $\bar{x} \in \mathcal{F}$ e $y \in \mathcal{F}$ tale che $\nabla f_i(\bar{x})^\top (y - \bar{x}) < 0$ per ogni $i = 1,\dots,k$. Dire, motivando la risposta, se il punto $\bar{x}$ è ottimo secondo Pareto del Problem (MOP).

4. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$
\begin{aligned}
&\min\ x^3\\
&s.t.\ -1 \le x \le 1.
\end{aligned}
$$

   (a) Scrivere l'espressione di una funzione di penalità esterna $P(x,\epsilon)$ continuamente differenziabile e del suo gradiente $\nabla P(x;\epsilon)$.

   (b) Quando $x_0 = -2$ ed $\epsilon = \ \ 1$, calcolare $\bar{x} = x_0 - \nabla P(x_0;\epsilon)$, $f(\bar{x})$ e $P(\bar{x};\epsilon)$.

   (c) Quando $x_0 = -2$ ed $\epsilon = 0.1$, calcolare $\bar{x} = x_0 - \nabla P(x_0;\epsilon)$, $f(\bar{x})$ e $P(\bar{x};\epsilon)$.