Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 28 Febbraio 2019

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Pseudo-codice del “compass search” forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x_k + \Delta_k d_i)$

  if $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k)$ **then**

    $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

  else

    $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k / 2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

  endif

  $k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

    $k \leftarrow k + 1$

    Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x_k + \Delta_k d_i)$

    if $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k)$ **then**

        $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

    else

        $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

    endif

    $k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: $\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

Un po' di analisi (matematica)

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}$)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Definizione (Segmento in $\mathbb{R}^n$)

Dati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, il segmento di estremi a e b è

$$[a, b] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b, \ t \in [0, 1]\}$$
$$(a, b) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b, \ t \in (0, 1)\}$$

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}^n$)

$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)^\top (b - a)$$

Un po' di analisi (matematica)

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}$)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Definizione (Segmento in $\mathbb{R}^n$)

Dati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, il segmento di estremi a e b è

$$\begin{aligned} [a, b] &\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1-t)b,\ \ t \in [0, 1]\} \\ (a, b) &\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1-t)b,\ \ t \in (0, 1)\} \end{aligned}$$

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}^n$)

$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)^\top (b - a)$$

Un po' di analisi (matematica)

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}$)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Definizione (Segmento in $\mathbb{R}^n$)

Dati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, il segmento di estremi a e b è

$$[a, b] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b,\ t \in [0, 1]\}$$

$$(a, b) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b,\ t \in (0, 1)\}$$

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}^n$)

$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)^\top (b - a)$$

Convergenza a punti stazionari

Sotto l'ipotesi (A1), faremo vedere che

$$\liminf_{k \to \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Seguiremo due strade.

1. Assumendo che ∇f sia continuo;
2. Assumendo che ∇f sia Lipschitz continuo con costante L.

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Per ogni $k \in K_2$ e $i = 1, \ldots, n$, abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \\ f(x_k - \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \end{aligned}$$

e, per il teorema della media,

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta_k e_i) &= f(x_k) + \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i \\ f(x_k - \Delta_k e_i) &= f(x_k) - \Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i \end{aligned}$$

dove $u_{k,i} = x_k + \xi_{k,i}\Delta_k e_i$ e $v_{k,i} = x_k - \mu_{k,i}\Delta_k e_i$, con $\xi_{k,i}, \mu_{k,i} \in (0,1)$ e quindi $\displaystyle\lim_{k\to\infty, k\in K_2} u_{k,i} = \lim_{k\to\infty, k\in K_2} v_{k,i} = \bar{x}$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Per ogni $k \in K_2$ e $i = 1, \ldots, n$, abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} f(x_k + \Delta_k e_i) & \geq & f(x_k) \\ f(x_k - \Delta_k e_i) & \geq & f(x_k) \end{array}$$

e, per il teorema della media,

$$\begin{array}{rcl} f(x_k + \Delta_k e_i) & = & f(x_k) + \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i \\ f(x_k - \Delta_k e_i) & = & f(x_k) - \Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i \end{array}$$

dove $u_{k,i} = x_k + \xi_{k,i}\Delta_k e_i$ e $v_{k,i} = x_k - \mu_{k,i}\Delta_k e_i$, con $\xi_{k,i}, \mu_{k,i} \in (0,1)$ e quindi $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} u_{k,i} = \lim_{k\to\infty, k\in K_2} v_{k,i} = \bar{x}$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Per ogni $k \in K_2$ e $i = 1, \dots, n$, abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \\ f(x_k - \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \end{aligned}$$

e, per il teorema della media,

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta_k e_i) &= f(x_k) + \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i \\ f(x_k - \Delta_k e_i) &= f(x_k) - \Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i \end{aligned}$$

dove $u_{k,i} = x_k + \xi_{k,i} \Delta_k e_i$ e $v_{k,i} = x_k - \mu_{k,i} \Delta_k e_i$, con $\xi_{k,i}, \mu_{k,i} \in (0,1)$ e quindi $\lim_{k \to \infty, k \in K_2} u_{k,i} = \lim_{k \to \infty, k \in K_2} v_{k,i} = \bar{x}$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Per ogni $k \in K_2$ e $i = 1, \dots, n$, abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \\ f(x_k - \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \end{aligned}$$

e, per il teorema della media,

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta_k e_i) &= f(x_k) + \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i \\ f(x_k - \Delta_k e_i) &= f(x_k) - \Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i \end{aligned}$$

dove $u_{k,i} = x_k + \xi_{k,i}\Delta_k e_i$ e $v_{k,i} = x_k - \mu_{k,i}\Delta_k e_i$, con $\xi_{k,i}, \mu_{k,i} \in (0,1)$ e quindi $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} u_{k,i} = \lim_{k\to\infty, k\in K_2} v_{k,i} = \bar{x}$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Segue anche che:

$$\begin{aligned} \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &\geq 0 \\ -\Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Dividendo per Δ_k e prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K_2$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty, k\in K_2} \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &= \nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0 \\ \lim_{k\to\infty, k\in K_2} -\nabla f(v_{k,i})^\top e_i &= -\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0, \end{aligned}$$

e quindi, $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Segue anche che:

$$\begin{aligned} \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &\geq 0 \\ -\Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Dividendo per Δ_k e prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K_2$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty, k\in K_2} \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &= \nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0 \\ \lim_{k\to\infty, k\in K_2} -\nabla f(v_{k,i})^\top e_i &= -\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0, \end{aligned}$$

e quindi, $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Segue anche che:

$$
\begin{aligned}
\Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &\geq 0 \\
-\Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Dividendo per Δ_k e prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K_2$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &= \nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0 \\
\lim_{k\to\infty, k\in K_2} -\nabla f(v_{k,i})^\top e_i &= -\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0,
\end{aligned}
$$

e quindi, $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Lipschitz Continuità di ∇f

Definizione

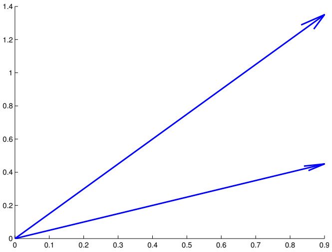
∇f è Lipschitz continuo (con costante L) su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ quando, comunque presi due punti $x, y \in A$, risulta

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Angolo tra due vettori

Coseno dell'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^n$:

$$\cos\theta(d,v) = \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|}$$

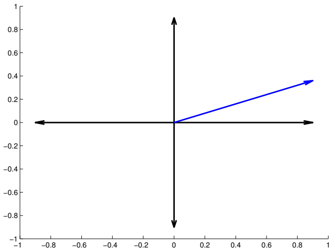


Angolo vettore – insieme di vettori

Dati:

- un insieme finito di vettori (direzioni) D
- un vettore $v \in \mathbb{R}^n$

$$\phi(v) = \max_{d \in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \max_{d \in D} \cos\theta(d, v)$$



Misura del coseno (di un ins. di vettori)

$$\phi(v) = \max_{d \in D} \frac{v^\top d}{\|v\| \|d\|} = \max_{d \in D} \cos \theta(d, v)$$

Dato un insieme finito di vettori (direzioni) D

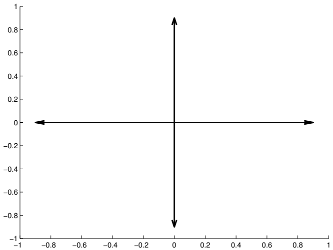
$$\kappa(D) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \phi(v) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \max_{d \in D} \frac{v^\top d}{\|v\| \|d\|}$$

Misura del coseno (di un ins. di vettori)

$$\phi(v) = \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \max_{d\in D} \cos\theta(d,v)$$

Dato un insieme finito di vettori (direzioni) D

$$\kappa(D) = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \phi(v) = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|}$$



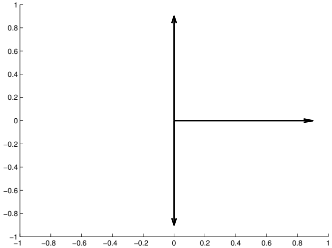
$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Misura del coseno (di un ins. di vettori)

$$\phi(v) = \max_{d \in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \max_{d \in D} \cos\theta(d, v)$$

Dato un insieme finito di vettori (direzioni) D

$$\kappa(D) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \phi(v) = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \max_{d \in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|}$$



$$\kappa(D) = 0$$

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$\kappa(D) = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\dots,n} \frac{|v^\top e_i|}{\|v\|}$$

$$= \min_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \max_{i=1,\dots,n} |v^\top e_i|$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$. Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$. □

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$\kappa(D) = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\dots,n} \frac{|v^\top e_i|}{\|v\|}$$

$$= \min_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \max_{i=1,\dots,n} |v^\top e_i|$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$. Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$. $\square$

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\kappa(D) &= \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\dots,n} \frac{|v^\top e_i|}{\|v\|} \\ &= \min_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \max_{i=1,\dots,n} |v^\top e_i|\end{aligned}$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$. Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$. □

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$
\begin{aligned}
\kappa(D) &= \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\dots,n} \frac{|v^\top e_i|}{\|v\|} \\
&= \min_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \max_{i=1,\dots,n} |v^\top e_i|
\end{aligned}
$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$. Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$. □

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\kappa(D) &= \min_{v\in\mathbb{R}^n}\max_{d\in D}\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n}\max_{i=1,\dots,n}\frac{|v^\top e_i|}{\|v\|}\\ &= \min_{v\in\mathbb{R}^n,\|v\|=1}\max_{i=1,\dots,n}|v^\top e_i|\end{aligned}$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$. Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$.

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\kappa(D) &= \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\dots,n} \frac{|v^\top e_i|}{\|v\|} \\ &= \min_{v\in\mathbb{R}^n,\|v\|=1} \max_{i=1,\dots,n} |v^\top e_i|\end{aligned}$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$.
Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$.

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\kappa(D) &= \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{d\in D} \frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1,\dots,n} \frac{|v^\top e_i|}{\|v\|} \\ &= \min_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \max_{i=1,\dots,n} |v^\top e_i|\end{aligned}$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$.
Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$,
$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$.

Una proprietà importante

Limitiamoci a considerare $D = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\kappa(D) &= \min_{v\in\mathbb{R}^n}\max_{d\in D}\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \min_{v\in\mathbb{R}^n}\max_{i=1,\ldots,n}\frac{|v^\top e_i|}{\|v\|} \\ &= \min_{v\in\mathbb{R}^n,\|v\|=1}\max_{i=1,\ldots,n}|v^\top e_i|\end{aligned}$$

Lemma

$\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$

dim. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $|v^\top e_i| = |v_i|$. Se $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = 1$, allora $|v^\top e_j| \geq 1/\sqrt{n}$ per qualche j. Quindi, $\kappa(D) \geq 1/\sqrt{n}$.
Se consideriamo $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ con $\alpha_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$.

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $\nabla f(x)$ è Lipschitz continuo modulo L, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0.$

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $\nabla f(x)$ è Lipschitz continuo modulo L, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $\nabla f(x)$ è Lipschitz continuo modulo L, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dal fatto che $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$, abbiamo che, per ogni $k \in K_2$, esiste almeno una direzione $d \in D$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq -\nabla f(x_k)^\top d \tag{1}$$

inoltre, siccome l'iterazione $k \in K_2$ è di fallimento:

$$0 \leq f(x_k + \Delta_k d) - f(x_k) = \nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d)^\top \Delta_k d$$

con $\beta_k \in (0,1)$. Cioè, sommando $-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d$ ad ambo i membri,

$$-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d \leq \Delta_k \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d$$

ovvero, per la (1),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d.$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dal fatto che $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$, abbiamo che, per ogni $k \in K_2$, esiste almeno una direzione $d \in D$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla f(x_k)\| \leq -\nabla f(x_k)^\top d \tag{1}$$

inoltre, siccome l'iterazione $k \in K_2$ è di fallimento:

$$0 \leq f(x_k + \Delta_k d) - f(x_k) = \nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d)^\top \Delta_k d$$

con $\beta_k \in (0,1)$. Cioè, sommando $-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d$ ad ambo i membri,

$$-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d \leq \Delta_k \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d$$

ovvero, per la (1),

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla f(x_k)\| \leq \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d.$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dal fatto che $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$, abbiamo che, per ogni $k \in K_2$, esiste almeno una direzione $d \in D$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq -\nabla f(x_k)^\top d \qquad (1)$$

inoltre, siccome l'iterazione $k \in K_2$ è di fallimento:

$$0 \leq f(x_k + \Delta_k d) - f(x_k) = \nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d)^\top \Delta_k d$$

con $\beta_k \in (0, 1)$. Cioè, sommando $-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d$ ad ambo i membri,

$$-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d \leq \Delta_k \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d$$

ovvero, per la (1),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d.$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dal fatto che $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$, abbiamo che, per ogni $k \in K_2$, esiste almeno una direzione $d \in D$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq -\nabla f(x_k)^\top d \qquad (1)$$

inoltre, siccome l'iterazione $k \in K_2$ è di fallimento:

$$0 \leq f(x_k + \Delta_k d) - f(x_k) = \nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d)^\top \Delta_k d$$

con $\beta_k \in (0, 1)$. Cioè, sommando $-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d$ ad ambo i membri,

$$-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d \leq \Delta_k \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d$$

ovvero, per la (1),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d.$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dal fatto che $\kappa(D) = 1/\sqrt{n}$, abbiamo che, per ogni $k \in K_2$, esiste almeno una direzione $d \in D$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq -\nabla f(x_k)^\top d \qquad (1)$$

inoltre, siccome l'iterazione $k \in K_2$ è di fallimento:

$$0 \leq f(x_k + \Delta_k d) - f(x_k) = \nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d)^\top \Delta_k d$$

con $\beta_k \in (0, 1)$. Cioè, sommando $-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d$ ad ambo i membri,

$$-\Delta_k \nabla f(x_k)^\top d \leq \Delta_k \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d$$

ovvero, per la (1),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq \left(\nabla f(x_k + \beta_k \Delta_k d) - \nabla f(x_k)\right)^\top d.$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Ora, usando la Lipschitz continuità di ∇f

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \le L\|\beta_k \Delta_k d\|\|d\| \le L\Delta_k,$$

quindi

$$\|\nabla f(x_k)\| \le \sqrt{n}L\Delta_k.$$

Il risultato segue ricordando che $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$ $\square$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Ora, usando la Lipschitz continuità di ∇f

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq L\|\beta_k \Delta_k d\|\|d\| \leq L\Delta_k,$$

quindi

$$\|\nabla f(x_k)\| \leq \sqrt{n}L\Delta_k.$$

Il risultato segue ricordando che $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$ $\square$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Ora, usando la Lipschitz continuità di ∇f

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla f(x_k)\| \leq L\|\beta_k \Delta_k d\|\|d\| \leq L\Delta_k,$$

quindi

$$\|\nabla f(x_k)\| \leq \sqrt{n} L \Delta_k.$$

Il risultato segue ricordando che $\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0$ $\square$