Consideriamo il problema

$$\begin{array}{llll} \min & f(x) & & (\lambda_0) \\ s.t. & g_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m & (\lambda_i) \\ & h_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, p & (\mu_j) \end{array}$$

Denotiamo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^\top$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^\top$ e

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) &= \lambda_0 f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x) \\ L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x) \end{aligned}$$

e notiamo che $L(x, \lambda, \mu) = \tilde{L}(x, 1, \lambda, \mu)$. Per le funzioni $\tilde{L}$ e L risulta

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) &= \lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu \\ \nabla_x L(x, \lambda, \mu) &= \nabla_x \tilde{L}(x, 1, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu \end{aligned}$$

1 Fritz-John

Definizione 1 (t-upla di Fritz-John) *Una t-upla $(x, \lambda_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+p+1}$ tale che $(\lambda_0, \lambda, \mu)^\top \neq \mathbf{0}_{m+p+1}$ e*

$$\begin{aligned} &\textit{(stazionarietà)} & \nabla_x \tilde{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \mathbf{0}_n \qquad (1a) \\ &\textit{(ammissibilità primale)} & g(x) \leq 0,\ h(x) = 0 \qquad (1b) \\ &\textit{(ammissibilità duale)} & \lambda_0 \geq 0,\ \lambda \geq 0 \qquad (1c) \\ &\textit{(complementarità)} & \lambda^\top g(x) = 0 \qquad (1d) \end{aligned}$$

è, per definizione, una t-upla di FJ.

Il sistema (1) di equazioni e disequazioni (in generale) non lineari è detto *sistema di Fritz-John.*

Definizione 2 (Punto di Fritz-John) *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di FJ quando esiste un vettore di moltiplicatori $(\lambda_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{m+p+1}$ tali che la t-upla $(x, \lambda_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+p+1}$ è una t-upla di FJ.*

Teorema 1 (C.N. di Fritz-John) *Sia x^* un punto di minimo locale del problema. Allora x^* è necessariamente un punto di FJ.*

2 Karush-Kuhn-Tucker

Definizione 3 (t-upla di Karush-Kuhn-Tucker) *Una t-upla $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+p}$ tale che*

$$\begin{aligned} &\textit{(stazionarietà)} & \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \mathbf{0}_n \qquad (2a) \\ &\textit{(ammissibilità primale)} & g(x) \leq 0,\ h(x) = 0 \qquad (2b) \\ &\textit{(ammissibilità duale)} & \lambda \geq 0 \qquad (2c) \\ &\textit{(complementarità)} & \lambda^\top g(x) = 0 \qquad (2d) \end{aligned}$$

è, per definizione, una t-upla di KKT.

Il sistema (2) di equazioni e disequazioni (in generale) non lineari è detto *sistema di KKT.*

Definizione 4 (Punto di Karush-Kuhn-Tucker) *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di KKT quando esiste un vettore di moltiplicatori $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{m+p}$ tali che la t-upla $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+p}$ è una t-upla di KKT.*

Dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$I_0(x) = \big\{ i \in \{1, \ldots, m\} :\ g_i(x) = 0 \big\}$$

Definizione 5 (Punto regolare) *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è regolare per i vincoli quando sono linearmente indipendenti i gradienti dei vincoli attivi nel punto, cioè quando è linearmente indipendente il seguente insieme di vettori*

$$\{\nabla g_i(x),\ i \in I_0(x),\ \nabla h_j(x),\ j = 1, \ldots, p\}.$$

Teorema 2 (C.N. di Karush-Kuhn-Tucker) *Sia x^* un punto di minimo locale del problema. Se x^* è regolare per i vincoli, allora x^* è necessariamente un punto di KKT.*

3 Domande e risposte

1. Esistono minimi locali e/o globali che NON sono punti di FJ?

   NO. Il Teorema di Fritz-John dice che ogni minimo locale (ed anche globale) DEVE essere un punto di FJ.

2. Esistono t-uple di FJ con $\lambda_0 \neq 0$?

   SI, certamente. Ad esempio tutte le soluzioni del sistema di KKT sono anche, banalmente, soluzioni del sistema di FJ con $\lambda = 1$.

3. Un punto di FJ con $\lambda_0 \neq 0$ è anche un punto di KKT?

   SI. Se x è punto di FJ, cioè esistono moltiplicatori λ_0, λ, μ con $\lambda_0 \neq 0$ tali che la t-upla $(x, \lambda_0, \lambda, \mu)$ è una t-upla di FJ. Allora, la t-upla $(x, \lambda/\lambda_0, \mu/\lambda_0)$ è una t-upla di KKT, quindi x è anche punto di KKT.

4. Possono esistere punti di minimo locale e/o globale che NON sono punti di KKT? **SI**. Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min\ x \\ &s.t.\ y - x^3 \leq 0,\ y \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

   Questo problema ammette il punto $A = (0,\ 0)^\top$ come unica soluzione globale. Si può facilmente verificare che A è punto di FJ con $\lambda_0 = 0$ e che A non è punto di KKT.

5. Un punto di minimo locale e/o globale che NON è regolare può essere un punto di KKT?

   SI.

$$\begin{aligned} &\min\ x \\ &s.t.\ y - x^2 \leq 0,\ -y \leq 0,\ -x \leq 0. \end{aligned}$$

   Questo problema ammette il punto $A = (0,\ 0)^\top$ come unica soluzione globale. In A sono attivi tutti e tre i vincoli del problema, quindi il punto A non è, secondo la definizione, regolare. Tuttavia, si può facilmente verificare che A è un punto di KKT con moltiplicatori $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \geq 0$, $\lambda_3 = 1$.

6. Ogni punto di KKT è regolare per i vincoli? **NO**. Basti considerare il problema del punto precedente per cui avevamo un punto di KKT che non è regolare.

7. Un punto di minimo locale e/o globale che sia regolare è un punto di KKT?

   SI, come garantito dal teorema di KKT.

8. Un punto di minimo locale e/o globale che sia regolare è un punto di FJ?

   SI. Anzi, il teorema di KKT garantisce che il detto punto è un punto di KKT, quindi un particolare punto di FJ con moltiplicatore $\lambda_0 = 1$.

9. Un punto di KKT è anche punto di FJ?

   SI. È un particolare punto di FJ con $\lambda_0 = 1$.

10. Un punto di FJ è anche un punto di KKT?

    NO. Basti, nuovamente, considerare il problema (3). Come detto il punto $(0,\ 0)^\top$ è punto di FJ ma non di KKT.

11. Un punto di FJ regolare può avere $\lambda_0 = 0$?

    NO. Per convincersi di questo, supponiamo per assurdo che $\lambda_0 = 0$. Allora il sistema di FJ diventa:

$$\begin{array}{rl} \text{(stazionarietà)} & \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0}_n \\ \text{(ammissibilità primale)} & g(x) \leq 0,\ h(x) = 0 \\ \text{(ammissibilità duale)} & \lambda_0 \geq 0,\ \lambda \geq 0 \\ \text{(complementarità)} & \lambda^\top g(x) = 0 \end{array}$$

    Come si vede, la condizione di stazionarietà insieme alla complementarità implicherebbe che sono linearmente indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. Cioè, il punto x non sarebbe regolare per i vincoli, contraddicendo l'ipotesi.

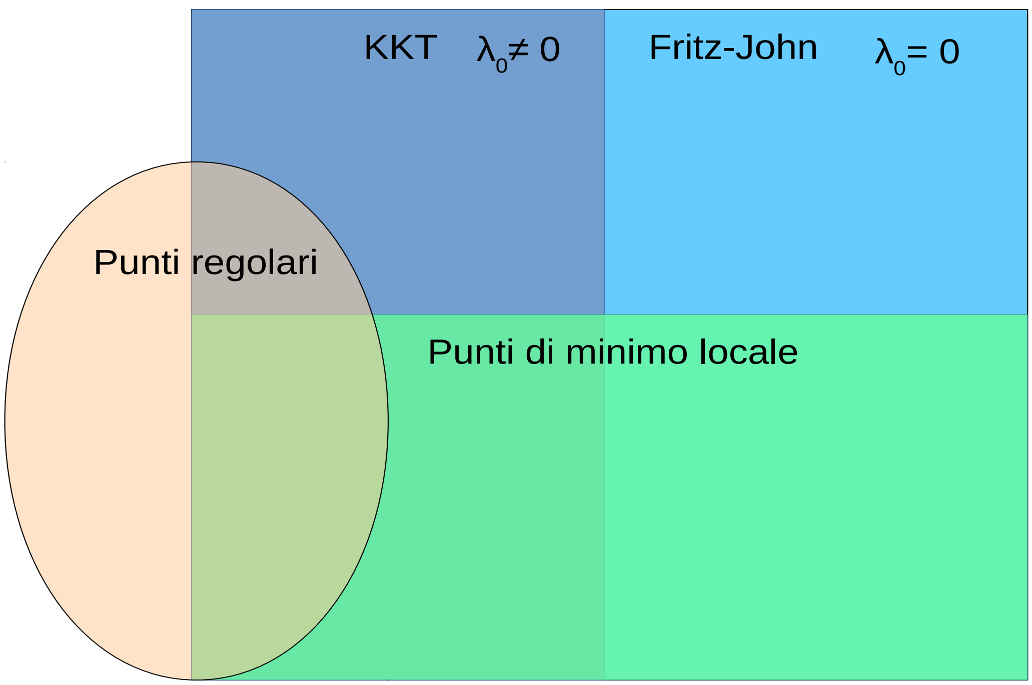
12. Un punto di FJ regolare è anche punto di KKT?

    SI. Per convincersi di questo supponiamo, per assurdo, che il punto non sia un punto di KKT, ovvero che $\lambda_0 = 0$. Ma questo vorrebbe dire che il punto x non è regolare.

13. Un punto di KKT che sia anche regolare è necessariamente un minimo locale? **NO**. Il Teorema di KKT fornisce condizioni solo necessarie di ottimo non anche sufficienti. Quindi, se conosciamo un minimo locale che è regolare, siamo garantiti del fatto che quel punto è un punto di KKT. Il viceversa non vale in generale.

14. Un punto di FJ è necessariamente un minimo locale?

    NO. Come sopra, il teorema di FJ fornisce condizioni solo necessarie di ottimo non anche sufficienti.


KKT $\lambda_0 \neq 0$
Fritz-John $\lambda_0 = 0$
Punti regolari
Punti di minimo locale