Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 28 Marzo 2019

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \ x^2$$
$$x \geq 1$$

Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon}\max\{0, 1 - x\}^2$$

Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min\ x^2$$
$$x \geq 1$$

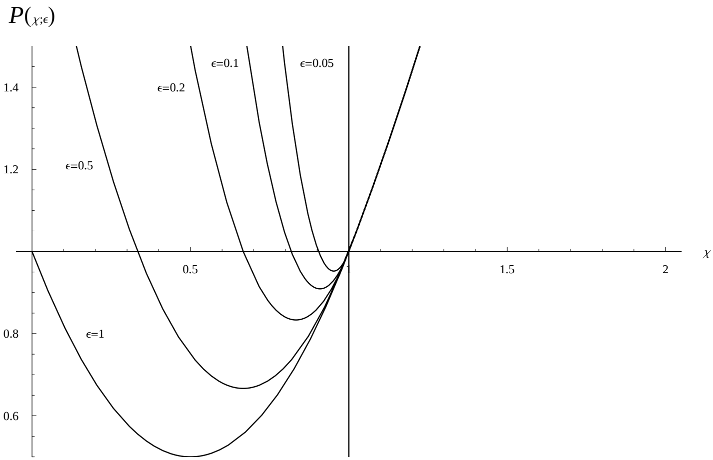
Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon}\max\{0, 1 - x\}^2$$

Esempio 1

Grafici di $P_\epsilon(x)$ $(\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05)$



Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \ -x^4$$
$$x = 1$$

Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\begin{aligned} \min\ & -x^4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

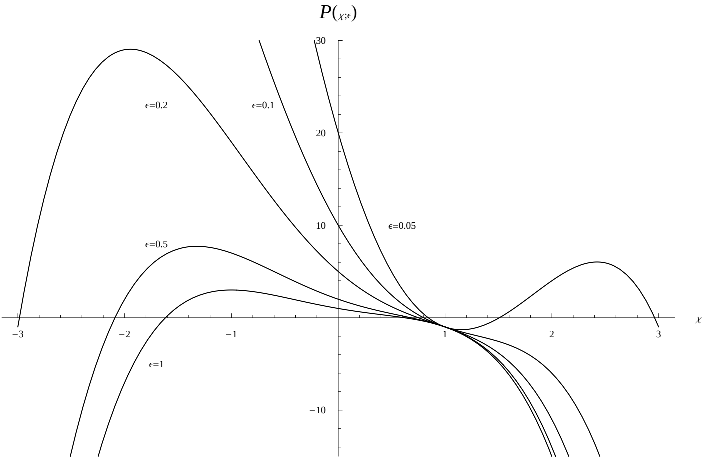
Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$)



Algoritmo SEQPEN

Algoritmo `SEQPEN`

INPUT: `maxit`, $\tau > 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \dots,$ `maxit`

Trova una soluzione globale (x^k) del problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{1}$$

if $q(x^k) \le \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN

L'algoritmo che abbiamo visto:

- ad ogni passo richiede di risolvere all'ottimo **gloable**

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; P_\epsilon(x);$$

- è (o può essere) **molto costoso**;
- non sempre è possibile;
- gli algoritmi di min. non vincolata determinano $\hat{x}$ t.c.

$$\|\nabla P_\epsilon(\hat{x})\| \leq \texttt{tol}.$$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: maxit, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \rho$

if $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \tau_k$

if $\tau_k < \rho$ **and** $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Proprietà di convergenza

Teorema

Sia $\{x_k\}$ *una successione t.c.* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$ *e* $\{x_k\}_K$ *una sottosucc. convergente ad* x^* *t.c. siano lin. indipendenti*

$$\nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*),\ \nabla h_j(x^*),\ \forall\, j.$$

Allora, x^* *è un punto di KKT di* (P_0) *con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{ \frac{2}{\epsilon_k} \max\{g(x_k), 0\} \right\}_K \to \lambda^*$$
$$\left\{ \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) \right\}_K \to \mu^*$$

Un po' di esempi di risoluzione

`esempio3`:

$$\min \; -x_1 - x_2$$
$$s.t. \; x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$x^0 = (-1, \; -1)^\top$
Ammete $(x^*, y^*) = (1, \; 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x - y + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

`esempio3`:

$$\min \; -x_1 - x_2$$
$$s.t. \; x_1^2 + x_2^2 = 1$$

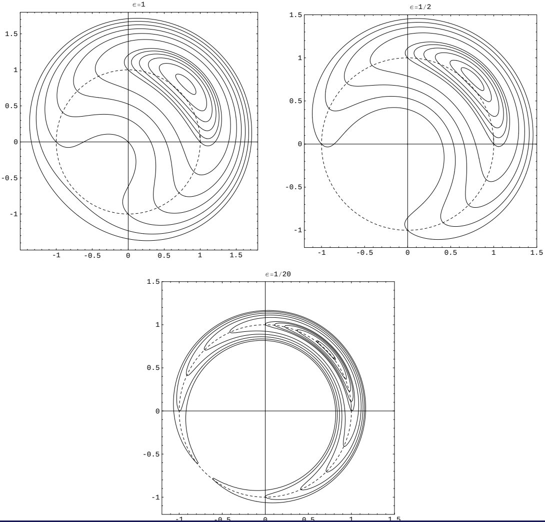
$x^0 = (-1, \; -1)^\top$
Ammete $(x^*, y^*) = (1, \; 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x - y + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.05$)



Un po' di esempi di risoluzione

`esempio4`:

$$\begin{array}{l} \min\ -x_1 - x_2 \\ s.t.\ x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{array}$$

$x^0 = (-1,\ -1)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`maratos`:

$$\min \ -x_1 + 2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$s.t. \ x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$x^0 = (-1, \ -1)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs14`:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-2)^2+(x_2-1)^2 \\ &s.t.\ x_1^2/4+x_2^2 \le 1 \\ &\qquad x_1-2x_2=-1 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

hs24:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_2^3((x_1-3)^2-9)/(27\sqrt{3}) \\
s.t.\ & x_1/\sqrt{3}-x_2 \geq 0 \\
& x_1+\sqrt{3}x_2 \geq 0 \\
& -x_1-\sqrt{3}x_2+6 \geq 0 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$x^0 = (1,\ 1/2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs32`:

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1 + 3 * x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 6x_2 + 4x_3 - x_1^3 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$x^0 = (0.1,\ 0.7,\ 0.2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs41`:

$$\begin{aligned} &\min\ 2 - x_1 x_2 x_3 \\ &s.t.\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ &\quad\quad 0 \le x_i \le 1,\ \ i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2,\ 2,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs55`:

$$
\begin{aligned}
\min \ & x_1 + 2x_2 + 4x_5 + e^{x_1 x_4} \\
s.t. \ & x_1 + 2x_2 + 5x_5 - 6 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\
& x_4 + x_5 + x_6 - 2 = 0 \\
& x_1 + x_4 - 1 = 0 \\
& x_2 + x_5 - 2 = 0 \\
& x_3 + x_6 - 2 = 0 \\
& x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, 6 \\
& x_1 \leq 1, \ \ x_4 \leq 1
\end{aligned}
$$

$x^0 = (1, \ 2, \ 0, \ 0, \ 0, \ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs60`:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^4 \\ &s.t.\ x_1(1+x_2^2)+x_3^4-4-3\sqrt{2}=0 \\ &\qquad -10 \le x_i \le 10,\ \ i=1,2,3 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2,\ 2)^\top$