

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi¹

Lunedí 20 Maggio 2019

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

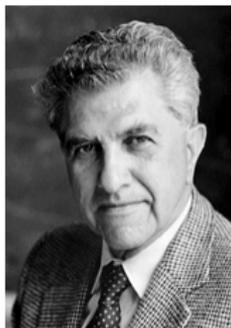


Introduction

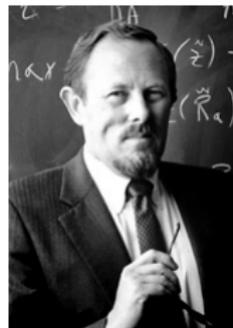
Nel 1990 il premio in memoria di A. Nobel viene conferito congiuntamente a:



Harry M. Markowitz



Merton H. Miller



William F. Sharpe



Introduction



The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1990
Harry M. Markowitz, Merton H. Miller, William F. Sharpe



KUNGL.
VETENSKAPSAKADEMIEN
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

Press Release

16 October 1990

THIS YEAR'S LAUREATES ARE PIONEERS IN THE THEORY OF FINANCIAL ECONOMICS
AND CORPORATE FINANCE

The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the 1990 Alfred Nobel
Memorial Prize in Economic Sciences with one third each, to

Professor **Harry Markowitz**, City University of New York, USA,
Professor **Merton Miller**, University of Chicago, USA,
Professor **William Sharpe**, Stanford University, USA,

for their pioneering work in the theory of financial economics.

Harry Markowitz is awarded the Prize for having developed the theory of portfolio choice;
William Sharpe, for his contributions to the theory of price formation for financial assets, the so-
called, *Capital Asset Pricing Model* (CAPM); and
Merton Miller, for his fundamental contributions to the theory of corporate finance.



Portfolio selection

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ
The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing *and* variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the “expected returns—variance of returns” rule.

H.M. Markowitz, “Portfolio selection”, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.



Motivazione del premio

“Before the 1950s, there was hardly any theory whatsoever of financial markets. A first pioneering contribution in the field was made by **Harry Markowitz**, who **developed a theory of portfolio decisions of households and firms under conditions of uncertainty**. The theory shows how the multidimensional problem of investing under conditions of uncertainty in a large number of assets, each with different characteristics, may be reduced to the issue of a trade-off between only two dimensions, namely the expected return and the variance of the return of the portfolio.”



Motivazione del premio

“Professors Markowitz, Miller and Sharpe,

You have by your research established the foundation for the field *Financial Economics and Corporate Finance*. The impressive development of this field of research in economics in recent years is largely based on your achievements. It is a pleasure to convey to you the warmest congratulations from the Royal Academy of Sciences and to ask you to receive from the hands of His Majesty the King the 1990 Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel.”



Calcolo delle Probabilità – richiami

Indichiamo con \mathbf{x} una variabile aleatoria (v.a.) a valori reali.

Conoscendo la funzione $p(\mathbf{x})$ di densità di probabilità della v.a. \mathbf{x} , possiamo calcolare:

- il momento del primo ordine (valore atteso) di \mathbf{x} :

$$E[\mathbf{x}] = \bar{\mu}_{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx;$$



Calcolo delle Probabilità – richiami

Indichiamo con \mathbf{x} una variabile aleatoria (v.a.) a valori reali.

Conoscendo la funzione $p(\mathbf{x})$ di densità di probabilità della v.a. \mathbf{x} , possiamo calcolare:

- il momento del primo ordine (valore atteso) di \mathbf{x} :

$$E[\mathbf{x}] = \bar{\mu}_{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx;$$

- il momento del secondo ordine (varianza) di \mathbf{x} :

$$E[(\mathbf{x} - \bar{\mu}_{\mathbf{x}})^2] = \bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{\mu}_{\mathbf{x}})^2 p(x)dx;$$

- ...



Combinazione lineare di due v.a.

Indichiamo con \mathbf{x} e \mathbf{y} due v.a. a valori reali.

Vogliamo calcolare valore atteso e varianza della v.a.

$$\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

- Valore atteso $E[\mathbf{z}]$:

$$E[\mathbf{z}] = \alpha E[\mathbf{x}] + \beta E[\mathbf{y}];$$



Combinazione lineare di due v.a.

Indichiamo con \mathbf{x} e \mathbf{y} due v.a. a valori reali.

Vogliamo calcolare valore atteso e varianza della v.a.

$$\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

- Valore atteso $E[\mathbf{z}]$:

$$E[\mathbf{z}] = \alpha E[\mathbf{x}] + \beta E[\mathbf{y}];$$

- Varianza di \mathbf{z} :

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{z} - E[\mathbf{z}])^2] &= E[(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} - \alpha E[\mathbf{x}] - \beta E[\mathbf{y}])^2] \\ &= E[(\alpha(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}]) + \beta(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}]))^2] \end{aligned}$$



Combinazione lineare di due v.a.

$$\begin{aligned} E[(z - E[z])^2] &= E[\alpha^2(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^2 + \beta^2(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])^2 + \\ &\quad 2\alpha\beta(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])] \\ &= \alpha^2 E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^2] + \beta^2 E[(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])^2] + \\ &\quad 2\alpha\beta E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])] \end{aligned}$$

$$\text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])]$$

$$E[(z - E[z])^2] = \bar{\sigma}_z^2 = \alpha^2 \bar{\sigma}_x^2 + \beta^2 \bar{\sigma}_y^2 + 2\alpha\beta \text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$



Combinazione lineare di v.a.

Consideriamo ora n v.a. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ e n scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Sia $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i$.

Risulta:

- Valore atteso:

$$E[\mathbf{z}] = \sum_{i=1}^n \alpha_i E[\mathbf{x}_i];$$

- Varianza:

$$E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{z}])^2] = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \bar{\sigma}_{\mathbf{x}_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \alpha_i \alpha_j \text{cov}[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]$$



Combinazione lineare di v.a.

Se indichiamo con $\text{cov}[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \bar{\sigma}_{\mathbf{x}}^2$ e con $Q = (q_{ij})$ la *matrice di covarianza*

$$q_{ij} = \text{cov}[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j],$$

risulta:

$$\bar{\sigma}_{\mathbf{z}}^2 = \alpha^T Q \alpha$$



Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i -esimo titolo.



Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i -esimo titolo.

Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).



Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i -esimo titolo.

Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).

Indichiamo con x_i la frazione di capitale investita nel titolo i -esimo e supponiamo di voler investire tutto il capitale, per cui è

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

N.B. le x_i sono quantità scelte dall'investitore quindi non sono v.a.



Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i -esimo titolo.

Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).

Indichiamo con x_i la frazione di capitale investita nel titolo i -esimo e supponiamo di voler investire tutto il capitale, per cui è

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

N.B. le x_i sono quantità scelte dall'investitore quindi non sono v.a.

Fissate le x_i il rendimento del portafoglio titoli è una v.a. combinazione delle R_i con coefficienti le x_i , cioè:

$$R = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$



Portfolio selection

Quindi, come abbiamo visto in precedenza:

$$\mu_R(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_{R_i},$$

$$\sigma_R^2(x) = x^T Q x,$$

dove, $q_{ij} = \sigma_{ij}$.



Portfolio selection - formulazione multiobiettivo

Markowitz dimostrò che il comportamento osservato di un investitore poteva essere spiegato considerando il seguente problema *multiobiettivo*

$$\begin{aligned} & \max \mu_R(x), \min \sigma_R^2(x) \\ & \text{s.t.} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

in cui si vuole *contemporaneamente* massimizzare il rendimento atteso e minimizzare la varianza. Per questo, il modello è anche noto con il nome di “*mean-variance*”



Ottimizzazione multiobiettivo del portafoglio

Il problema di portfolio selection formulato da Markowitz (modello mean-variance) è un caso particolare di problema di ottimizzazione a due obiettivi

$$\begin{aligned} \max \quad & (x^T R, -x^T Qx) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$



Il problema

Dati:

- $\mu \in \mathbb{R}^n$: vettore di rendimenti attesi
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice di covarianze

si definisce il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^\top x, \quad \min \frac{1}{2} x^\top Q x \\ \text{s.t.} \quad & e^\top x = 1, \quad x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

$$e = (1, 1, \dots, 1)^\top$$



Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i 50 titoli compresi nell'indice EUROSTOXX
Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal,
- Determinare il vettore ideale degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?



Calcolo del vettore ideale z^{id}

Risolvi (separatamente) i due problemi (a singolo obiettivo):

$$\max \mu^\top x$$

$$\text{s.t. } e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$

$$\Downarrow$$

$$x_\mu^*$$

$$\min \frac{1}{2} x^\top Q x$$

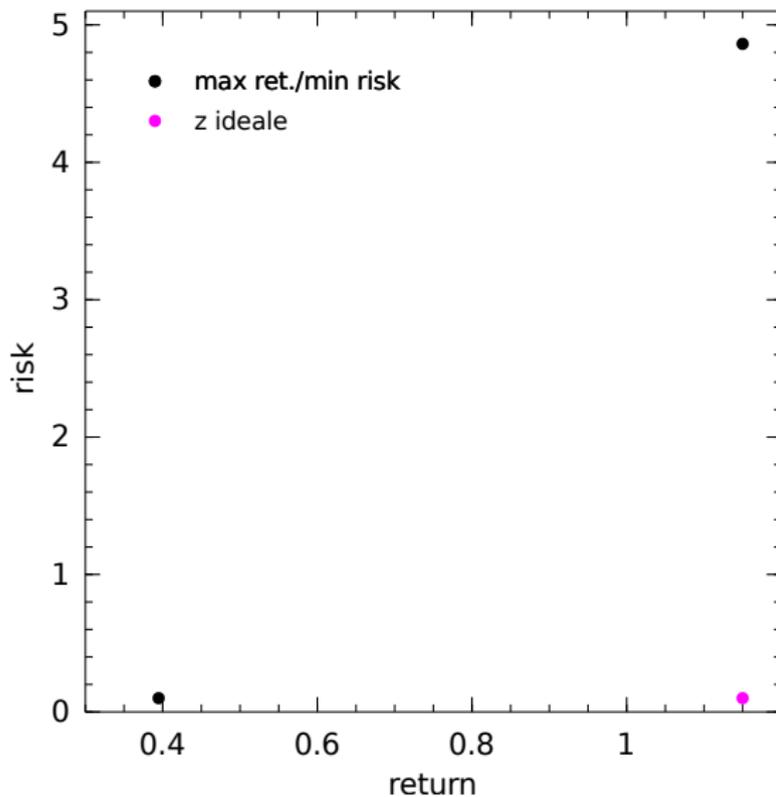
$$\text{s.t. } e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$

$$\Downarrow$$

$$x_\sigma^*$$

$$z^{id} = \left(\mu^\top x_\mu^*, \frac{1}{2} (x_\sigma^*)^\top Q x_\sigma^* \right)^\top$$



Calcolo del vettore ideale z^{id} 

Metodi SENZA preferenze



GOAL programming ($\|\cdot\|_\infty$)

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mu^\top x - z_1^{id}, x^\top Qx/2 - z_2^{id}\|_\infty \\ \text{s.t.} \quad & e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

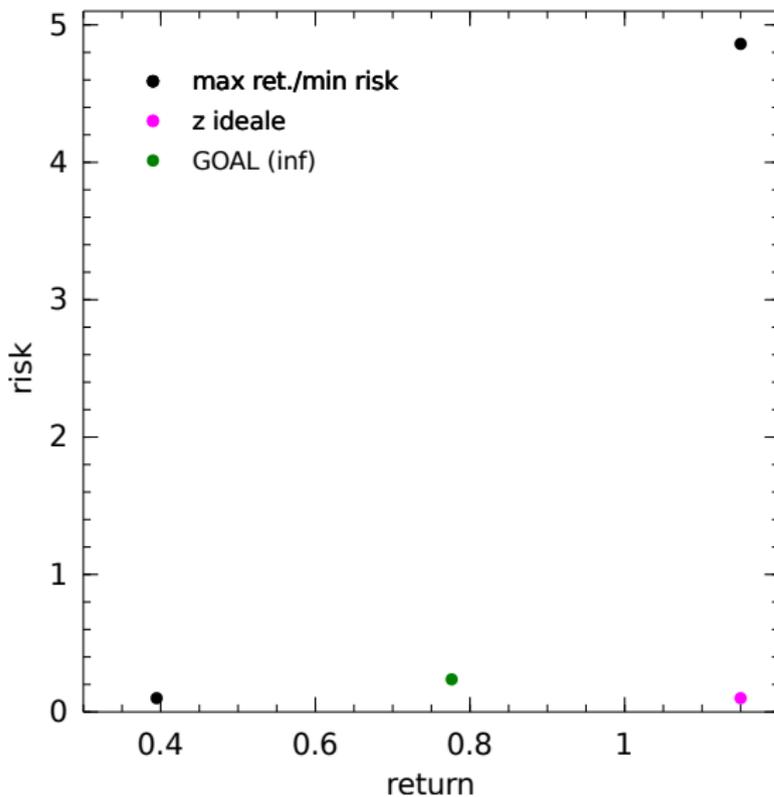
ovvero

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & z_1^{id} - \mu^\top x \leq \alpha \\ & x^\top Qx/2 - z_2^{id} \leq \alpha \\ & e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

\Downarrow

x_∞^*



GOAL programming ($\| \cdot \|_{\infty}$)

GOAL programming ($\| \cdot \|_1$)

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \| \mu^\top x - z_1^{id}, x^\top Qx/2 - z_2^{id} \|_1 \\ \text{s.t.} \quad & e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

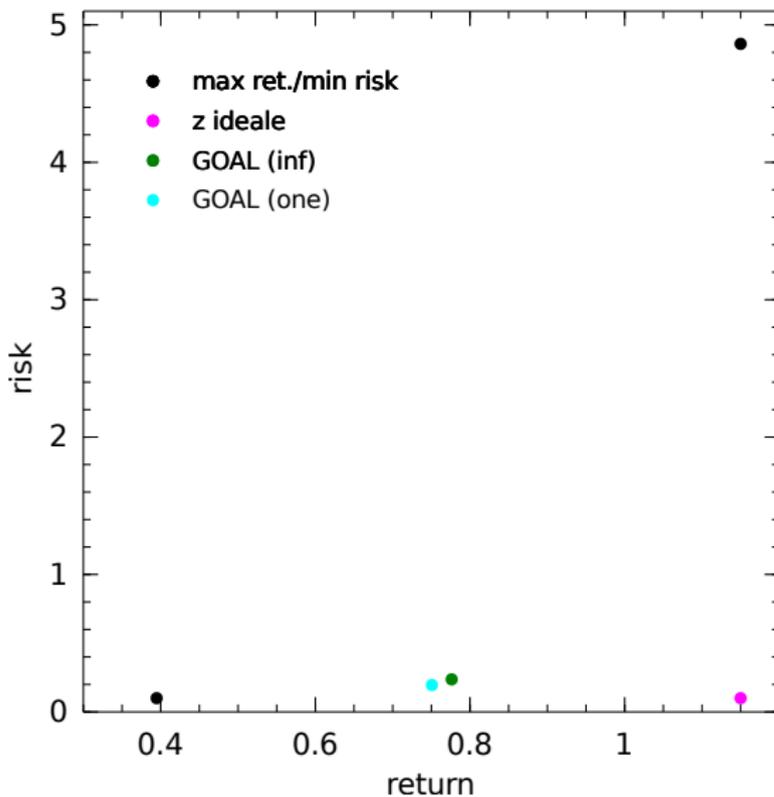
ovvero

$$\begin{aligned} \min \quad & -\mu^\top x + x^\top Qx/2 \\ \text{s.t.} \quad & e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

⇓

x_{one}^*



GOAL programming ($\| \cdot \|_1$)

Metodi “a posteriori”



Metodo dei pesi

Scegli un vettore $w \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{0}_2 \leq_P w$

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min w_1(-\mu^\top x) + w_2 x^\top Qx/2$$

$$\text{s.t. } e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$

ovvero, ponendo $w_1 = \beta$, $w_2 = (1 - \beta)$, $\beta \in [0, 1]$

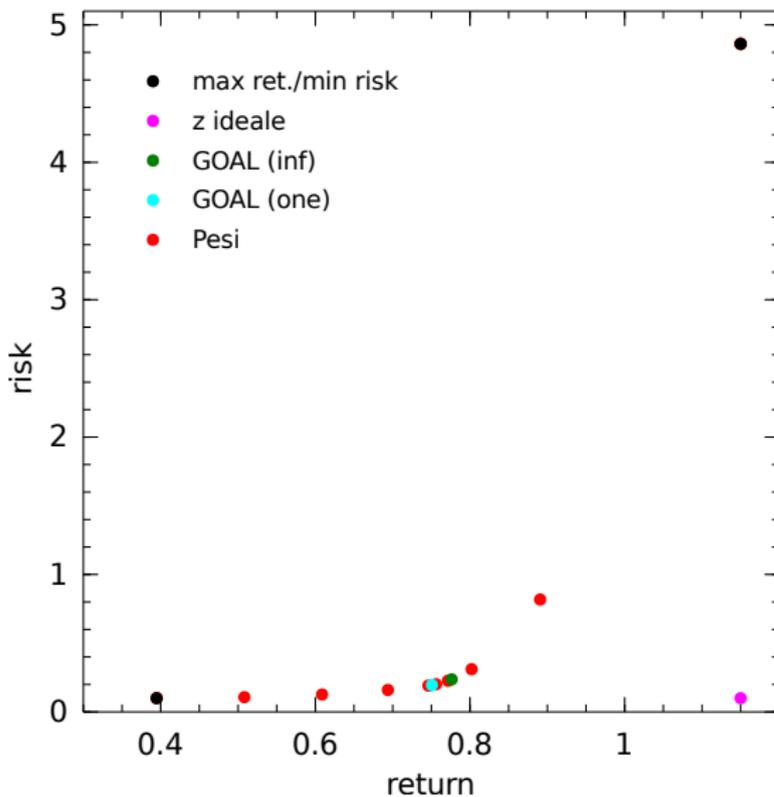
$$\min -\beta\mu^\top x + (1 - \beta)x^\top Qx/2$$

$$\text{s.t. } e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$

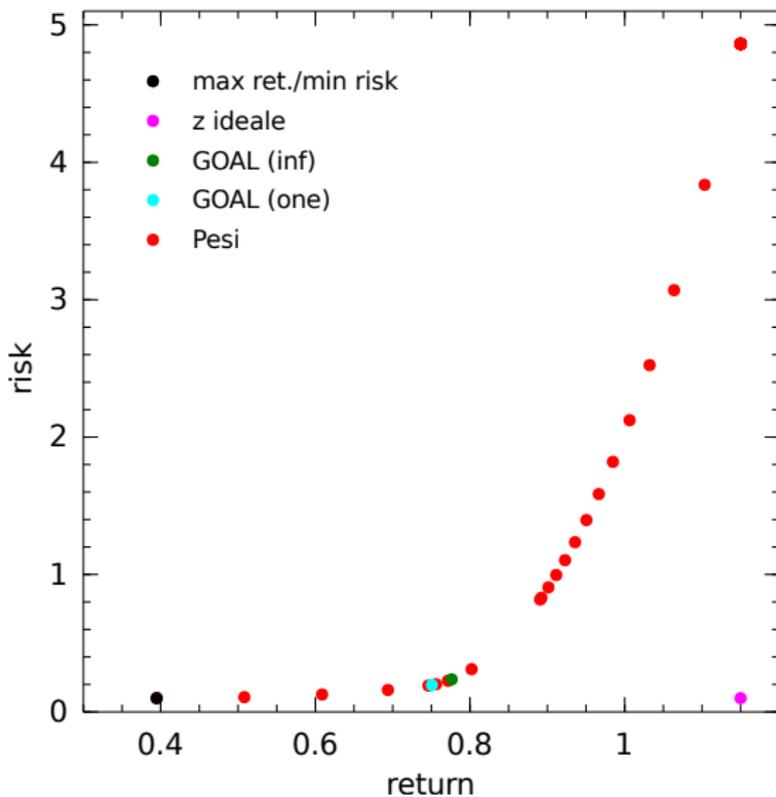
↓

x_β^*

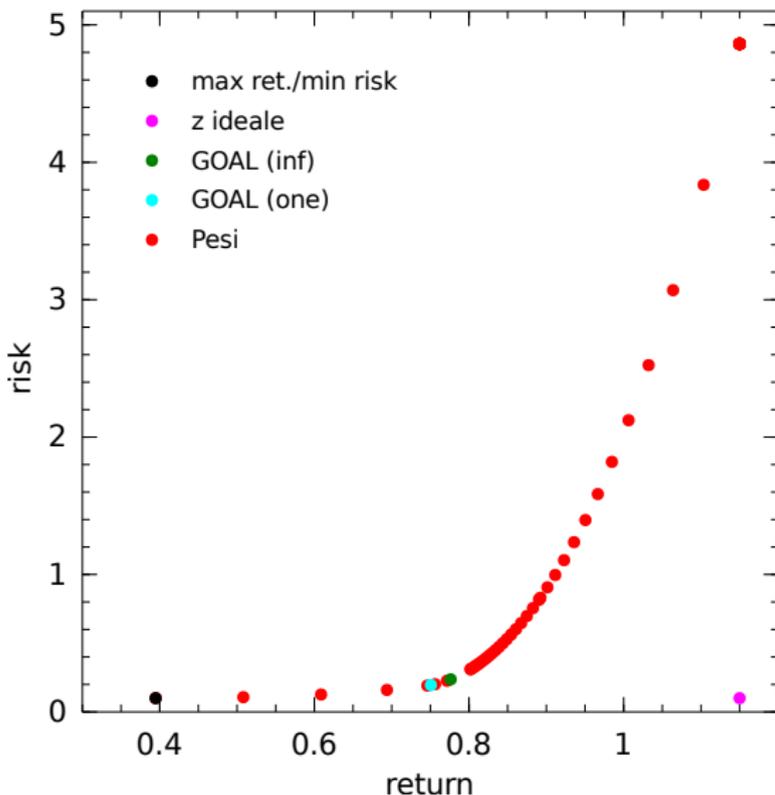


Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0, 1, 10)$)

Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0.89, 1, 20)$)



Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0.7777778, 0.888887, 20)$)



Metodo degli ε -vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^T Qx/2$
- $k - 1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema



Metodo degli ε -vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^T Qx/2$
- $k - 1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^T Qx/2$$

$$s.t. \mu^T x \geq \varepsilon$$

$$e^T x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$



Metodo degli ε -vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^T Qx/2$
- $k - 1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^T Qx/2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \mu^T x \geq \varepsilon \\ & e^T x = 1, x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**



Metodo degli ε -vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^T Qx/2$
- $k - 1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^T Qx/2$$

$$s.t. \mu^T x \geq \varepsilon$$

$$e^T x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x_σ^*



Metodo degli ε -vincoli

$$\min x^\top Qx/2$$

$$s.t. \mu^\top x \geq \varepsilon$$

$$e^\top x = 1, x \geq \mathbf{0}_n$$

Domanda: quale è un range “ragionevole” di valori per il parametro ε ?



Metodo ϵ -vincoli ($\epsilon = \text{linspace}(0.4, 1.14, 100)$)

