Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 19 Marzo 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Punti di Fritz-John

Sia $x^* \in \mathcal{F}$ un punto di minimo (locale/globale) del problema vincolato.

Il **Teorema di F.J.** ci dice che, il sistema di equazioni e disequazioni seguente

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda + \nabla h(x^*)\mu = \mathbf{0} \\ &(\lambda_0, \lambda) \geq 0 \\ &\lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ammette soluzione $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ diversa dal vettore tutto nullo.

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_{x} & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Il minimo globale del problema è il punto $(0,\ 0)^\top$. Infatti, i moltiplicatori

$$\lambda_0^* = 0, \quad \lambda_1^* = \lambda_2^* = a > 0$$

soddisfano il sistema di FJ

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \le 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{array}$$

Il minimo globale del problema è il punto $(0,\ 0)^\top$. Infatti, i moltiplicatori

$$\lambda_0^* = 0, \quad \lambda_1^* = \lambda_2^* = a > 0$$

soddisfano il sistema di FJ

Punti di Fritz-John

Definizione (Punto di F.J.)

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un **punto di F.J.** *quando esiste un vettore di moltiplicatori (di F.J.),* $(\lambda_0, \lambda, \mu) \neq \mathbf{0}$, *tale che sia soddisfatto il sistema*

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0} \\ &(\lambda_0, \lambda) \geq 0 \\ &\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &g(x) \leq \mathbf{0}, \ h(x) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Quindi, un minimo del problema è (per definizione) un punto di F.J.

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \le 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

Ovviamente, il minimo globale del problema cioè il punto $(0,\ 0)^\top$ è un punto di FJ con moltiplicatori

$$\lambda_0^* = 0, \quad \lambda_1^* = \lambda_2^* = a > 0$$

Esempio

$$\min_x \quad x_1$$
$$c.v \quad x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0$$

Consideriamo ora il punto $(1,\ 1)^\top$ e vediamo se è un punto di FJ

- si verifica facilmente che $(1,\ 1)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo ($x_2 \geq 0$) non è attivo, quindi $\lambda_2 = 0$
- il sistema

$$\lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0}$$

da luogo alle equazioni

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_0 = 3\lambda_1$$

quindi il sistema di FJ avrebbe come soluzione il vettore di molt. tutto nullo, il che è vietato. Quindi il punto considerato non è punto di FJ

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo ora il punto $(1,\ 1)^\top$ e vediamo se è un punto di FJ

- si verifica facilmente che $(1,\ 1)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo $(x_2 \geq 0)$ non è attivo, quindi $\lambda_2 = 0$
- il sistema

$$\lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0}$$

da luogo alle equazioni

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_0 = 3\lambda_1$$

quindi il sistema di FJ avrebbe come soluzione il vettore di molt. tutto nullo, il che è vietato. Quindi il punto considerato non è punto di FJ

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo ora il punto $(1,\ 1)^\top$ e vediamo se è un punto di FJ

- si verifica facilmente che $(1,\ 1)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo ($x_2 \geq 0$) non è attivo, quindi $\lambda_2 = 0$
- il sistema

$$\lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0}$$

da luogo alle equazioni

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_0 = 3\lambda_1$$

quindi il sistema di FJ avrebbe come soluzione il vettore di molt. tutto nullo, il che è vietato. Quindi il punto considerato non è punto di FJ

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo ora il punto $(1,\ 1)^\top$ e vediamo se è un punto di FJ

- si verifica facilmente che $(1,\ 1)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo $(x_2 \geq 0)$ non è attivo, quindi $\lambda_2 = 0$
- il sistema

  $$\lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0}$$

  da luogo alle equazioni

  $$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_0 = 3\lambda_1$$

quindi il sistema di FJ avrebbe come soluzione il vettore di molt. tutto nullo, il che è vietato. Quindi il punto considerato non è punto di FJ

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo ora il punto $(1,\ 1)^\top$ e vediamo se è un punto di FJ

- si verifica facilmente che $(1,\ 1)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo ($x_2 \geq 0$) non è attivo, quindi $\lambda_2 = 0$
- il sistema

  $$\lambda_0 \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0}$$

  da luogo alle equazioni

  $$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_0 = 3\lambda_1$$

quindi il sistema di FJ avrebbe come soluzione il vettore di molt. tutto nullo, il che è vietato. Quindi il punto considerato non è punto di FJ

Punti di KKT

Sia $x^* \in \mathcal{F}$ un punto **regolare** di minimo (locale/globale) del problema vincolato.

Il **Teorema di KKT** ci dice che è sempre compatibile (cioè ammette soluzione), il sistema di equazioni e disequazioni seguente

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda + \nabla h(x^*)\mu = \mathbf{0} \\ &\lambda \geq 0 \\ &\lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Punti di KKT

Definizione (Punto di KKT)

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ *è un* **punto di KKT** *quando esiste un vettore di moltiplicatori (di KKT),* (λ, μ)*, tale che sia soddisfatto il sistema*

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = \mathbf{0} \\
&\lambda \geq 0 \\
&\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\
&g(x) \leq \mathbf{0}, \;\; h(x) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Quindi, un minimo del problema (che sia anche regolare per i vincoli) è (per definizione) un punto di KKT.

Esempio

$$\min_x \quad x_1 - x_2$$
$$c.v \quad x_2 - x_1^3 \leq 0, \; x_2 \geq 0$$

Consideriamo il punto $(\sqrt{3}/3, \; (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ e vediamo se è un punto di KKT.

- si verifica facilmente che $(\sqrt{3}/3, \; (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo non è attivo, quindi $\lambda_2^* = 0$
- il sistema

  $$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda = \mathbf{0}$$

  da luogo alla condizione $\lambda_1^* = 1$

Quindi il punto considerato è un punto di KKT con moltiplicatori $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$.

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \le 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

Consideriamo il punto $(\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ e vediamo se è un punto di KKT.

- si verifica facilmente che $(\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo non è attivo, quindi $\lambda_2^* = 0$
- il sistema

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda = \mathbf{0}$$

da luogo alla condizione $\lambda_1^* = 1$

Quindi il punto considerato è un punto di KKT con moltiplicatori $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$.

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo il punto $(\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ e vediamo se è un punto di KKT.

- si verifica facilmente che $(\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo non è attivo, quindi $\lambda_2^* = 0$
- il sistema

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda = \mathbf{0}$$

da luogo alla condizione $\lambda_1^* = 1$

Quindi il punto considerato è un punto di KKT con moltiplicatori $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$.

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo il punto $(\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ e vediamo se è un punto di KKT.

- si verifica facilmente che $(\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo non è attivo, quindi $\lambda_2^* = 0$
- il sistema

  $$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda = \mathbf{0}$$

  da luogo alla condizione $\lambda_1^* = 1$

Quindi il punto considerato è un punto di KKT con moltiplicatori $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$.

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 - x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo il punto $(\sqrt{3}/3, \; (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ e vediamo se è un punto di KKT.

- si verifica facilmente che $(\sqrt{3}/3, \; (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ è ammissibile
- il secondo vincolo non è attivo, quindi $\lambda_2^* = 0$
- il sistema
$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda = \mathbf{0}$$
da luogo alla condizione $\lambda_1^* = 1$

Quindi il punto considerato è un punto di KKT con moltiplicatori $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$.

Ancora sulle cond. di KKT

Dato il problema con vincoli di ug. e disug.

$$\begin{array}{l} \min \ f(x) \\ s.t. \ h(x) = 0, \ g(x) \leq 0 \end{array}$$

si introduce solitamente la funzione **Lagrangiana** del problema $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+m+p} \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x)$$

Risulta per $\mathcal{L}$:

$$\nabla_x \mathcal{L} = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu$$

Ancora sulle cond. di KKT

Quindi, è possibile riscrivere le condizioni di KKT nel seguente modo

Sia $x^* \in \mathcal{F}$ un punto **regolare** di minimo (locale/globale) del problema vincolato.

Allora esistono dei moltiplicatori λ^*, μ^* tali che

$$
\begin{aligned}
&\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \mathbf{0} \\
&\lambda^* \geq 0 \\
&g(x^*)^\top \lambda^* = 0
\end{aligned}
$$

Ancora sulle cond. di KKT

Definizione (Punto di KKT)

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ *è un* **punto di KKT** *quando esiste un vettore di moltiplicatori (di KKT),* (λ, μ)*, tale che sia soddisfatto il sistema*

$$\begin{array}{ll} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \mathbf{0} & \textit{(stazionarietà)} \\ g(x) \leq \mathbf{0}, \;\; h(x) = \mathbf{0} & \textit{(ammissibilità primale)} \\ \lambda \geq \mathbf{0} & \textit{(ammissibilità duale)} \\ g(x)^\top \lambda = 0 & \textit{(complementarità)} \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 \leq 2,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 \leq 2,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & x_1 + x_2 \\ c.v \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 2, \;\; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & x_1 + x_2 \\ c.v \quad & x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & x_1 - x_2 \\ c.v \quad & x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$