Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 26 Marzo 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Esempio

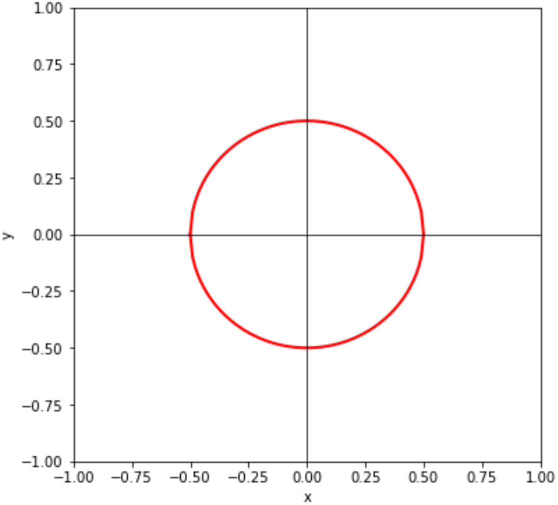
Si consideri il seguente problema vincolato:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-1)^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &s.t.\ x_1^2 + x_2^2 \le \tfrac{1}{4} \\ &\qquad x_1 + x_2 \le \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

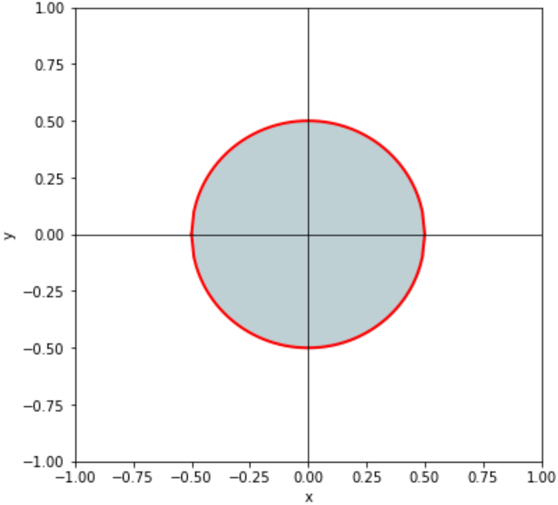
Con riferimento al problema di sopra,

- rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema;
- determinare tutti i punti di KKT del problema;
- determinare analiticamente il punto di minimo globale del problema;

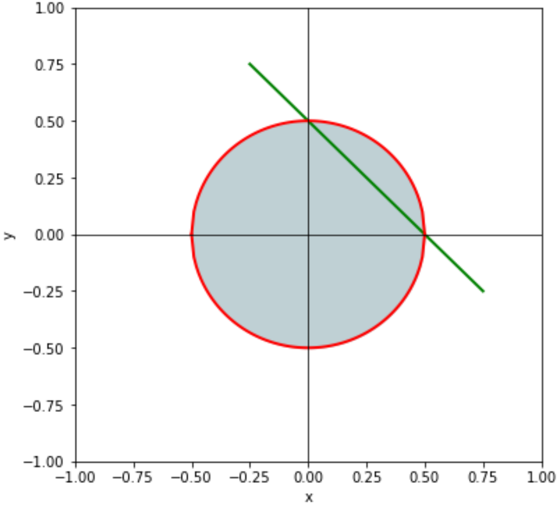
Esempio – Regione ammissibile



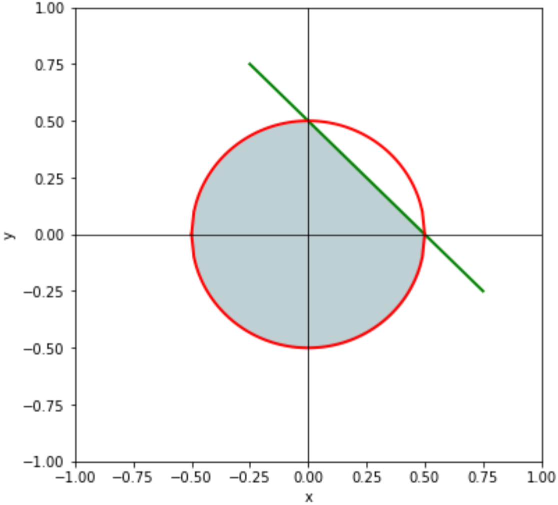
Esempio – Regione ammissibile



Esempio – Regione ammissibile



Esempio – Regione ammissibile



Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che è un sistema inammissibile. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$

  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che è un sistema inammissibile. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$

  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che è un sistema inammissibile. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

  $$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che è un sistema inammissibile. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0$

  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} x_1(1+\lambda_1) + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2(1+\lambda_1) = 0 \end{cases}$$

N.B. se poniamo $A = 1 + \lambda_1 > 0$ il sistema può essere scrito come

$$\begin{cases} Ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + Ax_2 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = -x_1/A \end{cases}$$

percui, dalla prima eq. otteniamo $A^2 x_1 - x_1 = A$ e quindi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{A^2-1} \\ x_2 &= -\frac{1}{A^2-1} \end{aligned}$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} x_1(1+\lambda_1) + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2(1+\lambda_1) = 0 \end{cases}$$

N.B. se poniamo $A = 1 + \lambda_1 > 0$ il sistema può essere scrito come

$$\begin{cases} Ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + Ax_2 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = -x_1/A \end{cases}$$

percui, dalla prima eq. otteniamo $A^2x_1 - x_1 = A$ e quindi

$$x_1 = \frac{A}{A^2-1}$$
$$x_2 = -\frac{1}{A^2-1}$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} x_1(1+\lambda_1) + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2(1+\lambda_1) = 0 \end{cases}$$

N.B. se poniamo $A = 1 + \lambda_1 > 0$ il sistema può essere scrito come

$$\begin{cases} Ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + Ax_2 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = -x_1/A \end{cases}$$

percui, dalla prima eq. otteniamo $A^2 x_1 - x_1 = A$ e quindi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{A^2-1} \\ x_2 &= -\frac{1}{A^2-1} \end{aligned}$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} x_1(1+\lambda_1) + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2(1+\lambda_1) = 0 \end{cases}$$

N.B. se poniamo $A = 1 + \lambda_1 > 0$ il sistema può essere scrito come

$$\begin{cases} Ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + Ax_2 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = -x_1/A \end{cases}$$

percui, dalla prima eq. otteniamo $A^2x_1 - x_1 = A$ e quindi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{A^2-1} \\ x_2 &= -\frac{1}{A^2-1} \end{aligned}$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

e, ricordando che il primo vincolo è attivo,

$$\frac{A^2}{(A^2-1)^2} + \frac{1}{(A^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

cioè

$$4A^2 + 4 = (A^2-1)^2, \quad 4A^2+4 = A^4 - 2A^2 + 1,$$
$$A^4 - 6A^2 - 3 = 0$$

Quindi,

$$A^2 = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 + 2\sqrt{3}$$
$$A = \lambda_1 + 1 = \sqrt{3+2\sqrt{3}}$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3+2\sqrt{3}} - 1$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

e, ricordando che il primo vincolo è attivo,

$$\frac{A^2}{(A^2-1)^2} + \frac{1}{(A^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

cioè

$$4A^2 + 4 = (A^2-1)^2, \quad 4A^2 + 4 = A^4 - 2A^2 + 1,$$
$$A^4 - 6A^2 - 3 = 0$$

Quindi,

$$A^2 = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 + 2\sqrt{3}$$
$$A = \lambda_1 + 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

e, ricordando che il primo vincolo è attivo,

$$\frac{A^2}{(A^2-1)^2} + \frac{1}{(A^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

cioè

$$4A^2 + 4 = (A^2-1)^2, \quad 4A^2 + 4 = A^4 - 2A^2 + 1,$$
$$A^4 - 6A^2 - 3 = 0$$

Quindi,

$$A^2 = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 + 2\sqrt{3}$$
$$A = \lambda_1 + 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3+2\sqrt{3}} - 1$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

e, ricordando che il primo vincolo è attivo,

$$\frac{A^2}{(A^2-1)^2} + \frac{1}{(A^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

cioè

$$4A^2 + 4 = (A^2-1)^2, \quad 4A^2 + 4 = A^4 - 2A^2 + 1,$$
$$A^4 - 6A^2 - 3 = 0$$

Quindi,

$$A^2 = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$A = \lambda_1 + 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

e, ricordando che il primo vincolo è attivo,

$$\frac{A^2}{(A^2-1)^2} + \frac{1}{(A^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

cioè

$$4A^2 + 4 = (A^2-1)^2, \quad 4A^2 + 4 = A^4 - 2A^2 + 1,$$
$$A^4 - 6A^2 - 3 = 0$$

Quindi,

$$A^2 = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 + 2\sqrt{3}$$
$$A = \lambda_1 + 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

e, ricordando che il primo vincolo è attivo,

$$\frac{A^2}{(A^2-1)^2} + \frac{1}{(A^2-1)^2} = \frac{1}{4}$$

cioè

$$4A^2 + 4 = (A^2-1)^2, \quad 4A^2 + 4 = A^4 - 2A^2 + 1,$$
$$A^4 - 6A^2 - 3 = 0$$

Quindi,

$$A^2 = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 + 2\sqrt{3}$$
$$A = \lambda_1 + 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

abbiamo determinato

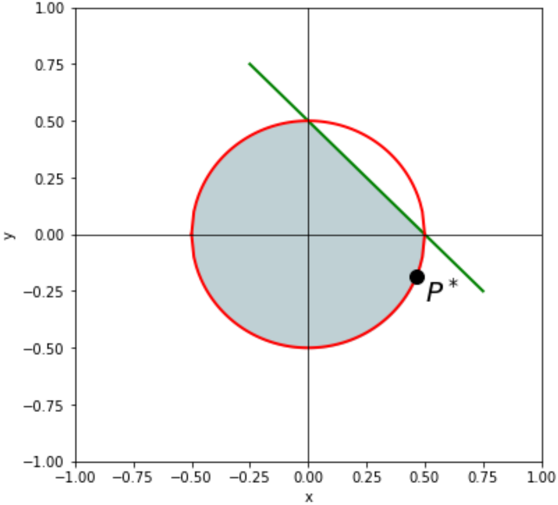
$$x_1 = \frac{A}{A^2 - 1},\ x_2 = -\frac{1}{A^2 - 1}$$
$$\lambda_1^* = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1,\ \lambda_2^* = 0$$
$$x_1^* = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}{2 + 2\sqrt{3}},\ x_2^* = -\frac{1}{2 + 2\sqrt{3}}$$

ci rimane da verificare se è rispettato il secondo vincolo. Per questo,

$$x_1^* + x_2^* = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1}{2 + 2\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$$

Quindi il punto $(x_1^*,\ x_2^*)^\top$ con molt. λ_1^*, λ_2^* è un punto di KKT

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)



Esempio – continua ($I_0 = \{2\}$)

- $I_0 = \{2\} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0$

  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ insieme al fatto che il secondo vincolo è attivo danno in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 1/2$$

cioè il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda_2/2 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda_2/2 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 1/2 \end{cases}$$

che è ovviamente inammissibile.

Esempio – continua ($I_0 = \{2\}$)

- $I_0 = \{2\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ insieme al fatto che il secondo vincolo è attivo danno in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x_1 + x_2 = 1/2$$

cioè il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda_2/2 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda_2/2 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 1/2 \end{cases}$$

che è ovviamente inammissibile.

Esempio – continua ($I_0 = \{2\}$)

- $I_0 = \{2\} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ insieme al fatto che il secondo vincolo è attivo danno in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 1/2$$

cioè il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda_2/2 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda_2/2 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad = 1/2 \end{cases}$$

che è ovviamente inammissibile.

Esempio – continua ($I_0 = \{1, 2\}$)

- $I_0 = \{1, 2\}$. Dal fatto che entrambi i vincoli sono attivi segue che

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1/4 \\ x_1 + x_2 = 1/2 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i due punti: $P_1 = (1/2,\ 0)^\top$ e $P_2 = (0,\ 1/2)^\top$.
Scriviamo la cond. di annullamento del gradiente della funzione Lagrangiana per il punto P_1

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue $\lambda_2 = -1 < 0$. Quindi, P_1 non è KKT. Per P_2 otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 = -2 < 0$. Quindi, anche P_2 non è KKT.

Esempio – continua ($I_0 = \{1, 2\}$)

- $I_0 = \{1, 2\}$. Dal fatto che entrambi i vincoli sono attivi segue che

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1/4 \\ x_1 + x_2 = 1/2 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i due punti: $P_1 = (1/2,\ 0)^\top$ e $P_2 = (0,\ 1/2)^\top$.
Scriviamo la cond. di annullamento del gradiente della funzione Lagrangiana per il punto P_1

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue $\lambda_2 = -1 < 0$. Quindi, P_1 non è KKT. Per P_2 otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 = -2 < 0$. Quindi, anche P_2 non è KKT.

Esempio

Dato il problema di PNL

$$\begin{aligned} \min\ & (x-2)^2 + y^2 \\ s.t.\ & y - \sqrt{2}x^2 \leq 0 \\ & y^2 + x^2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

- Determinare analiticamente tutti i punti di KKT del problema.

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che ammette come unica soluzione il punto $(2,\ 0)^\top$ che, però, non soddisfa il secondo vincolo. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

  $$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che ammette come unica soluzione il punto $(2,\ 0)^\top$ che, però, non soddisfa il secondo vincolo. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$

  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

  $$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che ammette come unica soluzione il punto $(2,\ 0)^\top$ che, però, non soddisfa il secondo vincolo. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – punti di KKT

L'insieme I_0 degli indici dei vincoli attivi nel (o nei) punti che dobbiamo determinare è un sottoinsieme dell'insieme

$$\Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$$

Procediamo per "tentativi"

- $I_0 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene $\nabla f = \mathbf{0}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  che ammette come unica soluzione il punto $(2,\ 0)^\top$ che, però, non soddisfa il secondo vincolo. Quindi, l'ipotesi $I_0 = \emptyset$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dalla seconda equazione otteniamo $y = -\lambda_1/2$ e, dall'ipotesi $I_0 = 1$,

$$\lambda_1/2 = -\sqrt{2}x^2, \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\sqrt{2}x^2$$

quindi $\lambda_1 = x = y0$. Passiamo a varificare la prima eq. dell'annullamento di $\nabla_x L$.

$$-4 = 0!$$

Quindi, anche l'ipotesi $I_0 = \{1\}$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dalla seconda equazione otteniamo $y = -\lambda_1/2$ e, dall'ipotesi $I_0 = 1$,

$$\lambda_1/2 = -\sqrt{2}x^2, \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\sqrt{2}x^2$$

quindi $\lambda_1 = x = y0$. Passiamo a varificare la prima eq. dell'annullamento di $\nabla_x L$.

$$-4 = 0!$$

Quindi, anche l'ipotesi $I_0 = \{1\}$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – continua ($I_0 = \{1\}$)

- $I_0 = \{1\} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ diviene in questo caso

  $$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  dalla seconda equazione otteniamo $y = -\lambda_1/2$ e, dall'ipotesi $I_0 = 1$,

  $$\lambda_1/2 = -\sqrt{2}x^2, \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2\sqrt{2}x^2$$

  quindi $\lambda_1 = x = y0$. Passiamo a varificare la prima eq. dell'annullamento di $\nabla_x L$.

  $$-4 = 0!$$

  Quindi, anche l'ipotesi $I_0 = \{1\}$ non porta al determinazione di alcun punto di KKT

Esempio – continua ($I_0 = \{2\}$)

- $I_0 = \{2\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$

  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ insieme al fatto che il secondo vincolo è attivo danno in questo caso

$$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

  dalla seconda eq. segue che $y(1+\lambda_2) = 0$ e cioè $y = 0$. Dalla terza eq. segue a questo punto $x = \pm 1$. Quindi abbiamo determinato i due punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Consideriamo la prima eq. che deriva da $\nabla_x L = \mathbf{0}$. Per A otteniamo

$$-2 + 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

  Per B otteniamo

$$-6 - 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = -3 < 0$$

Esempio – continua ($I_0 = \{2\}$)

- $I_0 = \{2\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$
  Quindi, la condizione $\nabla_x L = \mathbf{0}$ insieme al fatto che il secondo vincolo è attivo danno in questo caso

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

dalla seconda eq. segue che $y(1+\lambda_2) = 0$ e cioè $y = 0$. Dalla terza eq. segue a questo punto $x = \pm 1$. Quindi abbiamo determinato i due punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la prima eq. che deriva da $\nabla_x L = \mathbf{0}$. Per A otteniamo

$$-2 + 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

Per B otteniamo

$$-6 - 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = -3 < 0$$

Esempio – continua ($I_0 = \{1, 2\}$)

- $I_0 = \{1, 2\}$. Dal fatto che entrambi i vincoli sono attivi segue che

$$\begin{cases} y - \sqrt{2}x^2 = 0, & \rightarrow \quad x^2 = y/\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 1 & \rightarrow \quad y^2 + y/\sqrt{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i due punti: $C = (\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)^\top$ e $D = (-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)^\top$.
Scriviamo la cond. di annullamento del gradiente della funzione Lagrangiana per il punto C

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue $\lambda_1 = -4/3 < 0$. Quindi, C non è KKT. Per D otteniamo

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $\lambda_1 = 4/3$ e $\lambda_2 =< 0$. Quindi, anche D non è KKT.

Esempio – continua ($I_0 = \{1, 2\}$)

- $I_0 = \{1, 2\}$. Dal fatto che entrambi i vincoli sono attivi segue che

$$\begin{cases} y - \sqrt{2}x^2 = 0, & \rightarrow \quad x^2 = y/\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 1 & \rightarrow \quad y^2 + y/\sqrt{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i due punti: $C = (\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)^\top$ e $D = (-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)^\top$.
Scriviamo la cond. di annullamento del gradiente della funzione Lagrangiana per il punto C

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue $\lambda_1 = -4/3 < 0$. Quindi, C non è KKT. Per D otteniamo

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $\lambda_1 = 4/3$ e $\lambda_2 =< 0$. Quindi, anche D non è KKT.

Esempio – fine

Per il problema dato, l'unico punto di KKT determinato è

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con molt. } \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$$