Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 30 Aprile 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Funzione Hamiltoniana del problema

Dato che

$$
\begin{aligned}
\bar{J} &= J - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt \\
&= \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t)) dt - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt \\
&= \Psi(x(T)) + \int_0^T \left[H(\lambda(t), x(t), u(t)) - \lambda(t)^\top \dot{x}(t)\right] dt
\end{aligned}
$$

dove

$$
H(\lambda(t), x(t), u(t)) = \ell(x(t), u(t)) + \lambda(t)^\top f(x(t), u(t))
$$

è la funzione **Hamiltoniana** del problema

Veriazione del controllo

Nel contesto della PNL cosa si intende per intorno (aperto) di un punto ?

$$\mathcal{B}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x^* - x\| < \epsilon\}$$

Cioè se $x \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$, risulterà $\|x^* - x\| < \epsilon$

E nel contesto del controllo ottimo?

Veriazione del controllo

Nel contesto della PNL cosa si intende per intorno (aperto) di un punto ?

$$\mathcal{B}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x^* - x\| < \epsilon\}$$

Cioè se $x \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$, risulterà $\|x^* - x\| < \epsilon$

E nel contesto del controllo ottimo?

Variazione del controllo (1)

In luogo del controllo $u(t)$ consideriamo un nuovo controllo $v(t)$ che differisca integralmente di poco da $u(t)$, i.e. tale che

$$\int_0^T |u_i(t) - v_i(t)|\, dt < \epsilon$$

Se al controllo $u(t)$ corrisponde lo stato $x(t)$,
al nuovo controllo $v(t)$ corrisponderà il nuovo stato $x(t) + \delta_x(t)$ dove $\delta_x(t)$ è piccolo per ogni t

Sia $\delta \bar{J}$ la variazione della funzione $\bar{J}$ quando da $u(t)$ si passa a $v(t)$

Variazione del controllo (1)

In luogo del controllo $u(t)$ consideriamo un nuovo controllo $v(t)$ che differisca integralmente di poco da $u(t)$, i.e. tale che

$$\int_0^T |u_i(t) - v_i(t)|\, dt < \epsilon$$

Se al controllo $u(t)$ corrisponde lo stato $x(t)$,
al nuovo controllo $v(t)$ corrisponderà il nuovo stato $x(t) + \delta_x(t)$ dove $\delta_x(t)$ è piccolo per ogni t

Sia $\delta\bar{J}$ la variazione della funzione $\bar{J}$ quando da $u(t)$ si passa a $v(t)$

Variazione del controllo (1)

In luogo del controllo $u(t)$ consideriamo un nuovo controllo $v(t)$ che differisca integralmente di poco da $u(t)$, i.e. tale che

$$\int_0^T |u_i(t) - v_i(t)|\, dt < \epsilon$$

Se al controllo $u(t)$ corrisponde lo stato $x(t)$,
al nuovo controllo $v(t)$ corrisponderà il nuovo stato $x(t) + \delta_x(t)$ dove $\delta_x(t)$ è piccolo per ogni t

Sia $\delta\bar{J}$ la variazione della funzione $\bar{J}$ quando da $u(t)$ si passa a $v(t)$

Variazione del controllo (2)

$$
\begin{aligned}
\bar{J}_u &= \Psi(x(T)) + \int_0^T \left[H(\lambda, x, u) - \lambda^\top \dot{x} \right] dt \\
\bar{J}_v &= \Psi(x(T) + \delta_x(T)) + \int_0^T \left[H(\lambda, x + \delta_x, v) - \lambda^\top (\dot{x} + \dot{\delta}_x) \right] dt
\end{aligned}
$$

Percui,

$$
\begin{aligned}
\delta \bar{J} &= \bar{J}_v - \bar{J}_u = \Psi(x(T) + \delta_x(T)) - \Psi(x(T)) \\
&\quad + \int_0^T \left[H(\lambda, x + \delta_x, v) - \lambda^\top (\dot{x} + \dot{\delta}_x) - H(\lambda, x, u) + \lambda^\top \dot{x} \right] dt \\
&= \Psi(x(T) + \delta_x(T)) - \Psi(x(T)) \\
&\quad + \int_0^T \left[H(\lambda, x + \delta_x, v) - H(\lambda, x, u) - \lambda^\top \dot{\delta}_x \right] dt
\end{aligned}
$$

Variazione del controllo (3)

Mediante integrazione per parti, risulta

$$\int_0^T \lambda^\top \dot{\delta}_x dt = \lambda(T)^\top \delta_x(T) - \lambda(0)^\top \delta_x(0) - \int_0^T \dot{\lambda}^\top \delta_x dt$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\delta \bar{J} &= \Psi(x(T) + \delta_x(T)) - \Psi(x(T)) \\
&\quad + \int_0^T \left[H(\lambda, x + \delta_x, v) - H(\lambda, x, u) - \lambda^\top \dot{\delta}_x \right] dt \\
&= \Psi(x(T) + \delta_x(T)) - \Psi(x(T)) - \lambda(T)^\top \delta_x(T) + \lambda(0)^\top \delta_x(0) \\
&\quad + \int_0^T \left[H(\lambda, x + \delta_x, v) - H(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top \delta_x \right] dt
\end{aligned}$$

Variazione del controllo (4)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T [H(\lambda, x+\delta_x, v) - H(\lambda, x, u)]\, dt \\
&\quad = \int_0^T [H(\lambda, x+\delta_x, v) - H(\lambda, x, v) + H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]\, dt \\
&\quad \simeq \int_0^T [H_x(\lambda, x, v)\delta_x + H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]\, dt \\
&\quad = \int_0^T \Big[H_x(\lambda, x, u)\delta_x + \underbrace{(\underbrace{H_x(\lambda, x, v) - H_x(\lambda, x, u)}_{o(\epsilon)})\delta_x}_{o(\epsilon^2)} + H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)\Big]\, dt \\
&\quad \simeq \int_0^T \Big[H_x(\lambda, x, u)\delta_x + H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)\Big]\, dt
\end{aligned}
$$

Variazione del controllo (4)

Sostituendo

$$\int_0^T [H(\lambda, x+\delta_x, v) - H(\lambda, x, u)]\, dt$$
$$\simeq \int_0^T \Big[H_x(\lambda, x, u)\delta_x + H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)\Big] dt$$

nella espressione di $\delta\bar{J}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\delta\bar{J} \simeq\ & \Psi(x(T)+\delta_x(T)) - \Psi(x(T)) - \lambda(T)^\top\delta_x(T) + \lambda(0)^\top\delta_x(0) \\
& + \int_0^T \Big[H_x(\lambda, x, u)\delta_x + H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top\delta_x\Big] dt \\
\simeq\ & [\Psi_x(x(T)) - \lambda(T)^\top]\delta_x(T) + \lambda(0)^\top\delta_x(0) \\
& + \int_0^T [H_x(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top]\delta_x dt \\
& + \int_0^T [H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)] dt
\end{aligned}$$

Variazione del controllo (5)

Percui, quando il controllo passa da $u(t)$ a $v(t)$ con

$$\int_0^T |u_i(t) - v_i(t)|\, dt < \epsilon$$

la funzione obiettivo passa da $\bar{J}$ a $\bar{J} + \delta\bar{J}$ con

$$\begin{aligned} \delta\bar{J} \quad = \quad & [\Psi_x(x(T)) - \lambda(T)^\top]\delta_x(T) + \lambda(0)^\top\delta_x(0) \\ & + \int_0^T [H_x(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top]\delta_x dt \\ & + \int_0^T [H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]dt + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Equazione (differenziale) aggiunta

Risulta (ovviamente) che $x(0) + \delta_x(0) = x_0$ (cioè lo stato iniziale non cambia passando da u a v). Quindi, $\delta_x(0) = 0$.
Pertanto

$$\begin{aligned} \delta \bar{J} &= [\Psi_x(x(T)) - \lambda(T)^\top]\delta_x(T) \\ &\quad + \int_0^T [H_x(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top]\delta_x dt \\ &\quad + \int_0^T [H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]dt + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Inoltre, se scegliamo $\lambda(t)$ soluzione della *equazione differenziale aggiunta*:

$$\begin{aligned} \lambda(T)^\top &= \Psi_x(x(T)) \\ \dot{\lambda}(t)^\top &= -H_x(\lambda(t), x(t), u(t)) \end{aligned}$$

si avrà

$$\delta \bar{J} = \int_0^T [H(\lambda(t), x(t), v(t)) - H(\lambda(t), x(t), u(t))]dt + o(\epsilon)$$

Principio del massimo (di Pontryagin) (1)

Supponiamo che il controllo $u(t)$ si ottimo per il problema

$$\begin{aligned} \max \; J = \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \\ u(t) \in U, \quad \forall \; t \in [0, T] \end{aligned}$$

Supponiamo (per assurdo) che per un certo $t \in [0, T]$ esista una funzione $v \in U$ tale che

$$H(\lambda(t), x(t), v) > H(\lambda(t), x(t), u(t))$$

Allora, in base a quanto visto, potremmo cambiare $u(t)$ in $v(t)$ in modo da rendere

$$H(\lambda(t), x(t), v(t)) - H(\lambda(t), x(t), u(t)) > 0$$

in un intervallino contenente t. Questo renderebbe $\delta \bar{J} > 0$ negando il fatto che $u(t)$ è ottima

Principio del massimo (di Pontryagin) (2)

Percui, se $u(t)$ è ottimo, allora

$$H(\lambda(t), x(t), v) - H(\lambda(t), x(t), u(t)) \leq 0$$

per ogni t e per ogni funzione $v \in U$, cioè $u(t)$ massimizza l'Hamiltoniana