Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Mercoledì 6 Maggio 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Problema di minimo

Consideriamo il seguente problema di controllo ottimo (in forma di minimo)

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\
& \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\
& x(0) = x_0 \\
& u(t) \in U,\ \ t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

Vogliamo ricavare le condizioni di ottimo (date dal principio del massimo) per il problema

Problema di minimo (1)

Riscriviamo il problema in forma di max, ovvero

$$\begin{aligned} \max \ & -\Psi(x(T)) - \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad (\tilde{\lambda}(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in U, \ \ t \in [0, T] \end{aligned}$$

e indichiamo con $\tilde{H}(\tilde{\lambda}(t), x(t), u(t))$ la funzione Hamiltoniana per questo problema

$$\tilde{H}(\tilde{\lambda}(t), x(t), u(t)) = \tilde{\lambda}(t)^\top f(x(t), u(t)) - \ell(x(t), u(t))$$

Problema di minimo (2)

Le condizioni di ottimo date dal principio del massimo sono dunque:

$$\begin{aligned}
&-\tilde{\lambda}(T)^\top = \Psi_x(x(T)) \\
&-\dot{\tilde{\lambda}}(t)^\top = \tilde{H}_x(\tilde{\lambda}(t), x(t), u(t)) \\
&\tilde{H}(\tilde{\lambda}(t), x(t), v) \leq \tilde{H}(\tilde{\lambda}(t), x(t), u(t)), \quad \forall\ v \in U
\end{aligned}$$

ovvero, ponendo $\lambda(t) = -\tilde{\lambda}(t)$ e $H(\lambda, x, u) = \lambda^\top f(x, u) + \ell(x, u)$,

$$\begin{aligned}
&\lambda(T)^\top = \Psi_x(x(T)) \\
&\dot{\lambda}(t)^\top = -\lambda(t)^\top f_x(x(t), u(t)) - \ell_x(x(t), u(t)) = -H_x(\lambda, x, u) \\
&\tilde{\lambda}^\top f(x, v) - \ell(x, v) \leq \tilde{\lambda}^\top f(x, u) - \ell(x, u), \quad \forall\ v \in U
\end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri dell'ultima relazione per -1 si ottiene

$$-\tilde{\lambda}^\top f(x, v) + \ell(x, v) \geq -\tilde{\lambda}^\top f(x, u) + \ell(x, u), \quad \forall\ v \in U$$

cioè

$$H(\lambda, x, v) \geq H(\lambda, x, u), \quad \forall\ v \in U$$

Problema di minimo (3)

Quindi, le condizioni di ottimo per il problema

$$\begin{aligned} \min \ & \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad (\lambda(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in U, \ t \in [0, T] \end{aligned}$$

sono

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & \lambda(T)^\top = \Psi_x(x(T)) \\ & \dot{\lambda}(t)^\top = -H_x(\lambda(t), x(t), u(t)) \\ & H(\lambda(t), x(t), v) \geq H(\lambda(t), x(t), u(t)), \quad \forall \ t \in [0, T], \ v \in U \end{aligned}$$

N.B. sono lo medesime di un problema in forma di max tranne per il fatto che H deve avere in $u(t)$ un minimo

Problema di controllo ottimo

$$
\begin{aligned}
\max\ & \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\
& \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad (\lambda(t)) \\
& x(0) = x_0 \\
& x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, r(\leq n) \\
& u(t) \in U,\ \ t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

Quali sono le condizioni di ottimo (dettate dal principio del massimo) per questo problema?

Problema di controllo ottimo

$$
\begin{aligned}
\max\ \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\
\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad (\lambda(t)) \\
x(0) = x_0 \\
x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, r (\leq n) \\
u(t) \in U,\ \ t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

Quali sono le condizioni di ottimo (dettate dal principio del massimo) per questo problema?

Condizioni di ottimo

Riporcorrendo tutto il ragionamento fatto per derivare le condizioni di ottimo per un problema senza condizioni sullo stato finale, arriviamo a scrivere

$$\begin{aligned} d\bar{J} &= [\Psi_x(x(T)) - \lambda(T)^\top]\delta_x(T) \\ &\quad + \int_0^T [H_x(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top]\delta_x(t)dt \\ &\quad + \int_0^T [H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]dt + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Quindi, dovrà ancora valere la condizione data dalla eq. aggiunta

$$\dot{\lambda}^\top = -H_x(\lambda, x, u).$$

Per quanto invece riguarda l'annullamento del primo termine nella espressione di $d\bar{J}$, considerato che le condizioni $x_i(T) = \bar{x}_i$ impongono $\delta_x(T)_i = 0$, è sufficiente imporre

$$\lambda_i(T) = \Psi_x(x(T))_i, \quad i = r+1, \dots, n$$

Condizioni di ottimo (1)

Ricapitolando, le condizioni di ottimo sarebbero

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\
&x(0) = x_0,\ x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \ldots, r \\
&\lambda_i(T) = \Psi_x(x(T))_i, \quad i = r+1, \ldots, n \\
&\dot{\lambda}(t)^\top = -H_x(\lambda(t), x(t), u(t)) \\
&H(\lambda(t), x(t), v) \leq H(\lambda(t), x(t), u(t)), \quad \forall\ t \in [0, T],\ v \in U
\end{aligned}
$$

Casi degeneri

Quando consideriamo un problema con limitazioni sullo stato finale, dobbiamo essere consapevoli del fatto che possono verificarsi alcuni casi "degeneri" dovuti al fatto che il sistema dinamico

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ &x(0) = x_0, \quad x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

potrebbe

- NON ammettere una evoluzione dello stato $x(t)$ ammissibile
- ammettere una unica evoluzione $x(t)$ che quindi sarebbe ottima indipendentemente da funzione obiettivo e controllo

Condizioni di ottimo (1)

Per tenere conto di questi casi degeneri, le condizioni di ottimo si danno in questa forma.

Siano $x(t)$ e $u(t) \in U$ l'evoluzione dello stato in corrispondenza al controllo ottimo per il problema con limitazioni sullo stato finale. Allora, esiste una traiettoria aggiunta $\lambda(t)$ ed una costante $\lambda_0 \geq 0$ $(\lambda_0, \lambda(t) \neq \mathbf{0})$ tali che

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\
&x(0) = x_0,\ x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, r \\
&\lambda_i(T) = \lambda_0 \Psi_x(x(T))_i, \quad i = r+1, \dots, n \\
&\dot{\lambda}(t)^\top = -\lambda(t)^\top f_x(x(t), u(t)) - \lambda_0 \ell_x(x(t), u(t)) \\
&\lambda(t)^\top f(x(t), v) + \lambda_0 \ell(x(t), v) \leq \lambda(t)^\top f(x(t), u(t)) + \lambda_0 \ell(x(t), u(t)), \\
&\qquad \forall\ t \in [0, T],\ v \in U
\end{aligned}
$$

Percorso minimo tra due punti

Sul piano vogliamo determinare la curva x(t) tale che:

- $x(0) = 0$;
- $x(1) = 1$;
- $x(t)$ per $t \in [0, T]$ abbia lunghezza minima

Quando il tempo varia da t a $t + dt$, x passa da $x(t)$ a

$$x(t + dt) \simeq x(t) + \dot{x}(t)dt$$

la lunghezza del tratto (infinitesimo) di curva è pertanto

$$dL = \sqrt{dt^2 + \dot{x}(t)^2 dt^2} = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$$

Quindi

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$$

Percorso minimo tra due punti

Sul piano vogliamo determinare la curva x(t) tale che:

- $x(0) = 0$;
- $x(1) = 1$;
- $x(t)$ per $t \in [0, T]$ abbia lunghezza minima

Quando il tempo varia da t a $t + dt$, x passa da $x(t)$ a

$$x(t + dt) \simeq x(t) + \dot{x}(t)dt$$

la lunghezza del tratto (infinitesimo) di curva è pertanto

$$dL = \sqrt{dt^2 + \dot{x}(t)^2 dt^2} = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$$

Quindi

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$$

Percorso minimo tra due punti (2)

Se poniamo $\dot{x}(t) = u(t)$, il problema è

$$\begin{aligned} & \max -\int_0^1 \sqrt{1+u(t)^2}dt \\ & \dot{x}(t) = u(t) \\ & x(0) = 0 \\ & x(1) = 1 \end{aligned}$$

$$H(\lambda, \lambda_0, x, u) = \lambda(t)u(t) - \lambda_0\sqrt{1+u(t)^2}$$

L'equazione diff. aggiunta è quindi

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(\lambda, \lambda_0, x, u) = 0$$

e quindi $\lambda(t) = \bar{\lambda}$

Percorso minimo tra due punti (3)

Quindi $H = \bar{\lambda}u(t) - \lambda_0\sqrt{1 + u(t)^2}$. Proviamo ad imporre $\lambda_0 = 1$ (cioè supponiamo che non si verifichino situazioni degeneri). Allora

$$H = \bar{\lambda}u(t) - (1 + u(t)^2)^{1/2}$$

Le condizioni di ottimo impongo che H abbia un massimo in $u(t)$ per ogni t. Siccome l'unica quantità in H che dipende da t è $u(t)$ questo vuol dire che

$$H_u = \bar{\lambda} - \frac{u}{(1 + u^2)^{1/2}} = 0$$

cioè

$$u^2 = \frac{\bar{\lambda}^2}{(1 - \bar{\lambda}^2)} = \bar{d}$$

Quindi la curva cercata ha pendenza costante, quindi è un segmento di linea retta

Un problema isoperimetrico

Determinare la curva, di lunghezza fissata pari ad L, che collega due punti sull'asse t (0 e T) e che racchiude la massima area.

$$\max \int_0^T x(t)dt$$
$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0$$
$$\int_0^T \sqrt{1 + u(t)^2}dt = L$$

Ponendo $\dot{y}(t) = \sqrt{1 + u(t)^2}$ con $y(0) = 0$ e $y(T) = L$, possiamo scrivere il problema come

$$\max \int_0^T x(t)dt$$
$$\dot{x}(t) = u(t), \quad \dot{y}(t) = \sqrt{1 + u(t)^2}$$
$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y(T) = L$$

Un problema isoperimetrico

Determinare la curva, di lunghezza fissata pari ad L, che collega due punti sull'asse t (0 e T) e che racchiude la massima area.

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T x(t)dt \\
&\dot{x}(t) = u(t) \\
&x(0) = 0, \quad x(T) = 0 \\
&\int_0^T \sqrt{1 + u(t)^2}dt = L
\end{aligned}
$$

Ponendo $\dot{y}(t) = \sqrt{1 + u(t)^2}$ con $y(0) = 0$ e $y(T) = L$, possiamo scrivere il problema come

$$
\begin{aligned}
&\max \int_0^T x(t)dt \\
&\dot{x}(t) = u(t), \quad \dot{y}(t) = \sqrt{1 + u(t)^2} \\
&x(0) = 0, \quad x(T) = 0 \\
&y(0) = 0, \quad y(T) = L
\end{aligned}
$$

Un problema isoperimetrico (2)

Scrivere le condizioni di ottimo date dal principio del massimo

Problemi a tempo finale libero

Consideriamo il problema seguente: Dati

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
x(0) &= x_0 \\
x_i(T) &= \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, r
\end{aligned}
$$

(questa volta) vogliamo determinare $u(t) \in U$ e $T > 0$ tali che sia massimo il funzionale

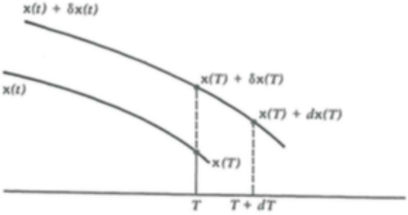
$$J = \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt$$

Anche per questo problema valgono tutti i ragionamenti che ci hanno portato a determinare la variazione $d\bar{J}$ della funzione quando il controllo passa da $u(t)$ a $v(t)$

TRANNE PER IL FATTO CHE ...

Problemi a tempo finale libero (1)

... anche il tempo finale passa da T a $T + dT$.



In conseguenza di ciò, il nuovo stato finale non è più $x(T) + \delta_x(T)$ ma

$$x(T) + dx(T) = x(T) + \delta_x(T + dT) =$$
$$x(T) + \delta_x(T) + \dot{x}(T)dT = x(T) + \delta_x(T) + f(x(T), u(T))dT$$

Problemi a tempo finale libero (2)

Se ricaviamo la variazione $d\bar{J}$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
d\bar{J} = \Psi_x(x(T))dx(T) - \lambda(T)^\top \delta x(T) + \ell(x(T), u(T))dT \\
\int_0^T [H_x(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top]\delta x dt \\
\int_0^T [H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]dt
\end{aligned}
$$

e sostituendo $\delta x(T) = dx(T) - f(x(T), u(T))dT$

$$
\begin{aligned}
d\bar{J} = \left(\Psi_x(x(T)) - \lambda(T)^\top\right)dx(T) + \left(\lambda(T)^\top f(x(T), u(T)) + \ell(x(T), u(T))\right)dT \\
\int_0^T [H_x(\lambda, x, u) + \dot{\lambda}^\top]\delta x dt \\
\int_0^T [H(\lambda, x, v) - H(\lambda, x, u)]dt
\end{aligned}
$$

Problemi a tempo finale libero (3)

Per tanto, le condizioni che si ottengono, sono le seguenti.

Siano $x(t)$ e $u(t) \in U$ l'evoluzione dello stato in corrispondenza al controllo e al tempo finale T ottimo per il problema a tempo finale libero. Allora, esiste una traiettoria aggiunta $\lambda(t)$ ed una costante $\lambda_0 \geq 0$ $(\lambda_0, \lambda(t) \neq \mathbf{0})$ tali che

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$x(0) = x_0, \;\; x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, r$$
$$\lambda_i(T) = \lambda_0 \Psi_x(x(T))_i, \quad i = r+1, \dots, n$$
$$\dot{\lambda}(t)^\top = -\lambda(t)^\top f_x(x(t), u(t)) - \lambda_0 \ell_x(x(t), u(t))$$
$$\boxed{\lambda(T)^\top f(x(T), u(T)) + \lambda_0 \ell(x(T), u(T)) = 0}$$
$$\lambda(t)^\top f(x(t), v) + \lambda_0 \ell(x(t), v) \leq \lambda(t)^\top f(x(t), u(t)) + \lambda_0 \ell(x(t), u(t)),$$
$$\forall\; t \in [0, T], \;\; v \in U$$