Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Mercoledì 13 Maggio 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

$$\min f_1(x), \dots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $k > 1$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\mathbb{R}^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"

- $x \in \mathbb{R}^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \mathbb{R}^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Introduzione

$$\min f_1(x), \ldots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

$x \in \mathbb{R}^n,\ k > 1,\ f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n.$

- $\mathbb{R}^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\mathbb{R}^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"

- $x \in \mathbb{R}^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \mathbb{R}^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Introduzione

$$\min f_1(x), \dots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $k > 1$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\mathbb{R}^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"

- $x \in \mathbb{R}^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \mathbb{R}^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Introduzione

Definiamo

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ **vettore delle f.obiettivo**
- $\mathcal{Z} = f(\mathcal{F})$ **regione ammissibile degli obiettivi**:

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^k : z = f(x), x \in \mathcal{F}\}.$$

- z^{id} **vettore ideale** degli obiettivi:

$$z_i^{id} = \min_{x \in \mathcal{F}} \; f_i(x)$$

  per ogni $i = 1, \dots, k$.

N.B. assumiamo che $z^{id} \notin \mathcal{Z}$, cioè che le funzioni obiettivo siano in contrasto fra di loro.

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Possiamo definire nello spazio k dimensionale un ordinamento parziale non riflessivo.

Dovuto all'economista e sociologo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923)

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\mathbb{R}^k$ diciamo che:

z^1 *domina* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 \leq_P z^2$) se

$z_i^1 \leq z_i^2$ per **ogni** $i = 1, \dots, k$, e

$z_j^1 < z_j^2$ per **qualche** $j \in \{1, \dots, k\}$.

N.B. l'ordinamento è **solo parziale**, quindi esistono coppie di vettori z^1, z^2 tali che **non risulta**

$$\text{ne} \quad z^1 \leq_P z^2 \quad \text{ne} \quad z^2 \leq_P z^1 \quad !!$$

In questo caso si dice che z^1 e z^2 sono vettori **non dominati** tra loro

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\mathbb{R}^k$ diciamo che:

z^1 *domina* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 \leq_P z^2$) se

$z_i^1 \leq z_i^2$ per **ogni** $i = 1, \dots, k$, e

$z_j^1 < z_j^2$ per **qualche** $j \in \{1, \dots, k\}$.

N.B. l'ordinamento è **solo parziale**, quindi esistono coppie di vettori z^1, z^2 tali che **non risulta**

$$\text{ne} \quad z^1 \leq_P z^2 \quad \text{ne} \quad z^2 \leq_P z^1 \qquad !!$$

In questo caso si dice che z^1 e z^2 sono vettori **non dominati** tra loro

Ordinamento debole

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\mathbb{R}^k$ diciamo che:

z^1 *domina debolmente* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 < z^2$) se

$$z_i^1 < z_i^2 \text{ per } \textbf{ogni } i = 1, \dots, k.$$

N.B. se $z^1 < z^2$ allora $z^1 \leq_P z^2$ ma, in generale, **non vale** il viceversa.

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} &\min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ &s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) \leq_P f(x^*)$$

Nello spazio degli obiettivi, l'insieme degli ottimi secondo Pareto Ω_P è noto con il nome di:

- "**frontiera efficiente**"
- "**frontiera di Pareto**"

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \ldots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) \leq_P f(x^*)$$

Nello spazio degli obiettivi, l'insieme degli ottimi secondo Pareto Ω_P è noto con il nome di:

- "**frontiera efficiente**"
- "**frontiera di Pareto**"

Definizione di ottimalità debole

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo debole** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) < f(x^*)$$

N.B. l'insieme degli ottimi di Pareto (Ω_P) è contenuto nell'insieme degli ottimi deboli di Pareto (Ω_D)

$$\Omega_P \subseteq \Omega_D.$$

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

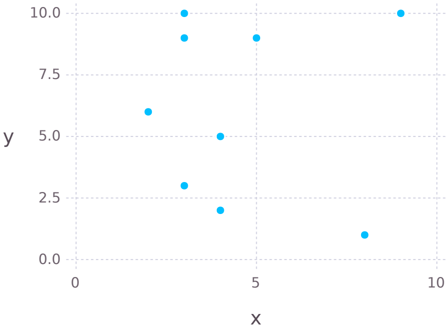
Esempio (1)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	9	4	3	2	3	5	8	3	5
y	2	10	5	10	6	3	9	1	9	9

Esempio (1)



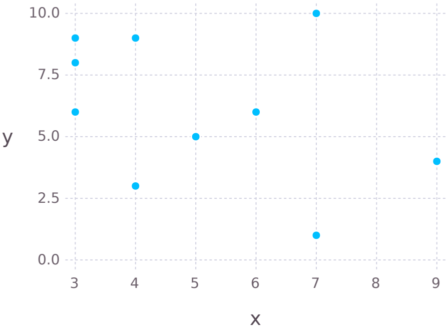
	a	e	f	h
x	4	2	3	8
y	2	6	3	1

Esempio (2)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	3	4	4	5	7	6	3	7	3	9
y	6	9	3	5	1	6	8	10	9	4

Esempio (2)



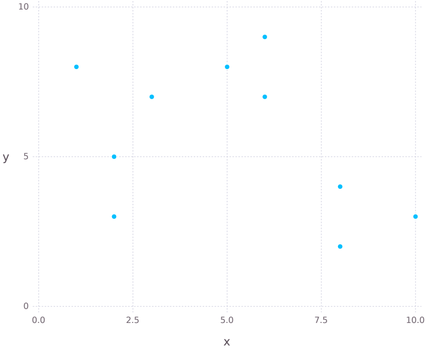
	a	c	e
x	3	4	7
y	6	3	1

Esempio (3)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	1	3	5	8	10	6	2	2	8	6
y	8	7	8	2	3	7	3	5	4	9

Esempio (3)



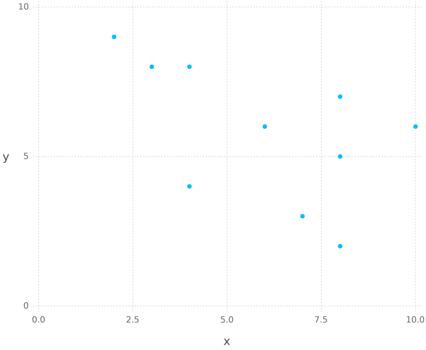
	a	d	g
x	1	8	2
y	8	2	3

Esempio (4)

Determinare l'insieme dei punti **non dominati** tra i seguenti

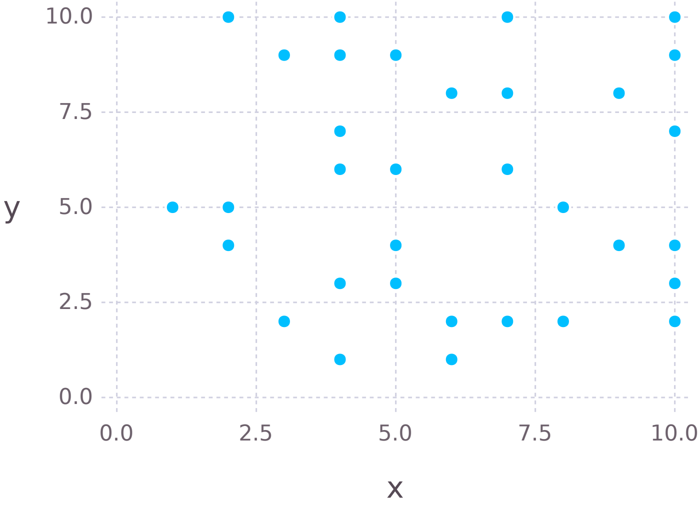
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	4	3	8	8	6	2	4	7	10	8
y	8	8	5	2	6	9	4	3	6	7

Esempio (4)

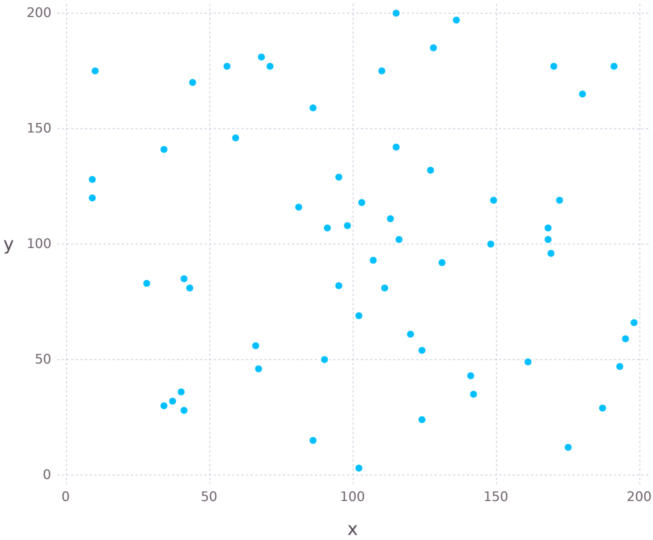


	b	d	f	g	h
x	3	8	2	4	7
y	8	2	9	4	3

Esempio (5)



Esempio (6)



Introduzione

Cominciamo con il considerare il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x} \;\; f(x) \\ s.t. \; x \in \mathcal{F} \end{array}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$, f_i cont. differenziabili
- $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \ell \le x \le u\}$
- $-\infty < \ell_i < u_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{array}{rcl} C(x) & = & \{d \in \mathbb{R}^n : \; d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F(x) & = & \{d \in \mathbb{R}^n : \; d \neq 0, f(x + \beta d) \le_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{array}$$

Condizione necessaria di ottimo (1)

Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale) di Pareto, allora $C(x) \cap F(x) = \emptyset$,

cioè, se x è ottimo, non possono esistere direzioni d contemporaneamente ammissibili e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall\ y \in \mathcal{F},\ \exists\ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall\ y \in \mathcal{F},\ \exists\ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall\ y \in \mathcal{F},\ \exists\ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall \ y \in \mathcal{F}, \ \exists \ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall \ y \in \mathcal{F}, \ \exists \ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \min_{y\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \leq 0 \\ y(x) &= \arg\min_{y\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \end{aligned}$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$
\begin{aligned}
\theta(x) &= \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) \ \leq 0 \\
y(x) &= \arg\min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x)
\end{aligned}
$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) \ \leq 0 \\ y(x) &= \arg\min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) \end{aligned}$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

C.N. di ottimo secondo Pareto

Proposizione

Sia x^* ottimo di Pareto, allora

$$0 = \theta(x^*) = \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x^*)^\top (y - x^*)$$

C.N. di ottimo debole secondo Pareto

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F_d(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, f(x + \beta d) < f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}. \end{aligned}$$

Risulta ancora

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F_d(x)$$

Quindi

Proposizione

Sia x^* ottimo debole di Pareto, allora

$$0 = \theta(x^*) = \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x^*)^\top (y - x^*)$$

Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min_x \ f(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) \leq 0\} \end{array}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^\top$, f_i cont. differenziabili
- $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))^\top$, g_j cont. differenziabili

Introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

percui:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x)$$

C.N. di Fritz-John (2)

Teorema

Condizione necessaria affinché un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ tali che:

$$\begin{aligned}
&\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0 \\
&\mu^\top g(\bar{x}) = 0 \\
&(\lambda, \mu) \geq 0, \ (\lambda, \mu) \neq 0
\end{aligned}$$

N.B. nell'enunciato delle teorema nulla vieta che possano essere identicamente nulli i moltiplicatori λ_i associati alle funzioni obiettivo.

Se assumiamo che $\bar{x}$ oltre ad essere un ottimo secondo Pareto è anche un **punto regolare** per i vincoli, allora è possibile asserire che almeno uno dei moltiplicatori λ_i è strettamente positivo

C.N. di Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Sia $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *un punto in cui sono* lin. indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. *Condizione necessaria affinché* $\bar{x}$ *sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori* $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ *tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \;\; \lambda \neq 0$$

C.N. di ottimo debole di Pareto

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F_d(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, f(x + \beta d) < f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{aligned}$$

Risulta ancora

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla g_i(x)^\top d < 0, \ i \in I_0(x)\} \subseteq C(x) \\ F_0(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, \ i = 1, \dots, k\} \subseteq F_d(x) \end{aligned}$$

Quindi, le C.N. di FJ e di KKT appena viste sono necessarie anche per l'ottimalità debole di Pareto

Caso convesso ed equivalenza

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} &\min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ &s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

siano f_i convesse su $\mathcal{F}$ convesso. Sotto queste ipotesi il problema è **convesso**

Proposizione

Per un problema multiobiettivo convesso ogni ottimo locale di Pareto è anche ottimo globale

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta)x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar\beta$ tale che $x_{\bar\beta} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \le \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar\beta$ tale che $x_{\bar\beta} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \le \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*) \le f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \le \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \le f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \le_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \le f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Supponiamo

- di aver determinato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$
- dei moltiplicatori $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\begin{aligned} &\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0 \\ &\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0 \end{aligned}$$

e supponiamo (per assurdo) che $\bar{x}$ non sia un ottimo di Pareto del problema.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} > 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.

Quindi, il problema

$$\begin{aligned} &\min \; F(x) \\ &s.t. \; g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

è un problema convesso.

Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} > 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.
Quindi, il problema

$$\begin{array}{l} \min \;\; F(x) \\ s.t. \; g(x) \leq 0 \end{array}$$

è un problema convesso.
Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} > 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.
Quindi, il problema

$$\begin{array}{l} \min \; F(x) \\ s.t. \; g(x) \leq 0 \end{array}$$

è un problema convesso.
Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) \leq_P f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) \leq_P f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) \leq_P f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Supponiamo

- di aver determinato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$
- dei moltiplicatori $\bar{\lambda} \geq 0$ (non tutti nullil) e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

e supponiamo (per assurdo) che $\bar{x}$ non sia un ottimo debole di Pareto del problema.

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} \geq 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.

Quindi, il problema

$$\begin{aligned} &\min \; F(x) \\ &s.t. \; g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

è un problema convesso.

Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} \geq 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.
Quindi, il problema

$$\begin{array}{l} \min\ F(x) \\ s.t.\ g(x) \leq 0 \end{array}$$

è un problema convesso.
Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} \geq 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.
Quindi, il problema

$$\begin{array}{l} \min \ F(x) \\ s.t. \ g(x) \leq 0 \end{array}$$

è un problema convesso.
Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo debole di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo debole di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} \geq 0$ (non tutti nulli) e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo debole di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo debole di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} \geq 0$ (non tutti nulli) e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo debole di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo debole di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} \geq 0$ (non tutti nulli) e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione necessaria e sufficiente di ottimo debole di Pareto

Proposizione

C.N.S. affinché $x^* \in \mathcal{F}$ *sia ottimo debole di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori* $\lambda^* \geq 0$ *(non tutti nulli) e* $\mu^* \geq 0$ *tali che*

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$
$$g(x^*)^\top \mu^* = 0$$

Ottimizzazione multiobiettivo del protafoglio

Il problema di portfolio selection formulato da Markowitz (modello mean-variance) è un caso particolare di problema di ottimizzazione a due obiettivi

$$\max\ (x^T R, -x^T Qx)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1,\ \ i = 1, \dots, n.$$

Esempio numerico: EUROSTOXX50

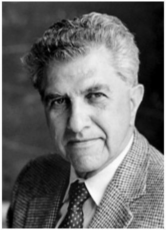
- Consideriamo come possibili investimenti i **48 titoli** compresi nell'indice **EUROSTOXX**
  Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il **vettore ideale** degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?

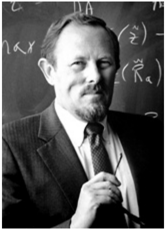
Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i **48 titoli** compresi nell'indice **EUROSTOXX**
  Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il **vettore ideale** degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?

Introduction

Nel 1990 il premio in memoria di A. Nobel viene conferito congiuntamente a:

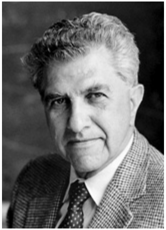




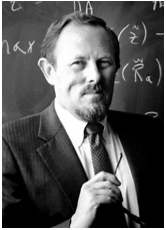
Introduction

Nel 1990 il premio in memoria di A. Nobel viene conferito congiuntamente a:

Harry M. Markowitz



Merton H. Miller



William F. Sharpe

Introduction

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1990
Harry M. Markowitz, Merton H. Miller, William F. Sharpe

KUNGL.
VETENSKAPSAKADEMIEN
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

Press Release

16 October 1990

THIS YEAR'S LAUREATES ARE PIONEERS IN THE THEORY OF FINANCIAL ECONOMICS AND CORPORATE FINANCE

The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the 1990 Alfred Nobel Memorial Prize in Economic Sciences with one third each, to

Professor **Harry Markowitz**, City University of New York, USA,
Professor **Merton Miller**, University of Chicago, USA,
Professor **William Sharpe**, Stanford University, USA,

for their pioneering work in the theory of financial economics.

Harry Markowitz is awarded the Prize for having developed the theory of portfolio choice;
William Sharpe, for his contributions to the theory of price formation for financial assets, the so-called, *Capital Asset Pricing Model* (CAPM); and
Merton Miller, for his fundamental contributions to the theory of corporate finance.

Portfolio selection

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ
The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing *and* variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the "expected returns—variance of returns" rule.

H.M. Markowitz, "Portfolio selection", The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

Motivazione del premio

"Before the 1950s, there was hardly any theory whatsoever of financial markets. A first pioneering contribution in the field was made by **Harry Markowitz**, who **developed a theory of portfolio decisions of households and firms under conditions of uncertainty**. The theory shows how the multidimensional problem of investing under conditions of uncertainty in a large number of assets, each with different characteristics, may be reduced to the issue of a trade-off between only two dimensions, namely the expected return and the variance of the return of the portfolio."

Motivazione del premio

"Professors Markowitz, Miller and Sharpe,

You have by your research established the foundation for the field *Financial Economics and Corporate Finance*. The impressive development of this field of research in economics in recent years is largely based on your achievements. It is a pleasure to convey to you the warmest congratulations from the Royal Academy of Sciences and to ask you to receive from the hands of His Majesty the King the 1990 Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel."

Portfolio selection

Markowitz osservò che il comportamento tipico di un investitore finanziario è quello di *diversificare* il proprio portafoglio di titoli.

"The hypothesis that the investor does maximize discounted return must be rejected [...] the foregoing rule never implies that there is a diversified portfolio which is preferable to all non-diversified portfolios"

"There is a rule which implies both that the investor should diversify and that he should maximize expected return. [...] This rule is a special case of the expected returns-variance of returns rule"

Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i-esimo titolo.

Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).

Indichiamo con x_i la frazione di capitale investita nel titolo i-esimo e supponiamo di voler investire tutto il capitale, per cui è

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

N.B. le x_i sono quantità scelte dall'investitore quindi **non sono v.a.**

Fissate le x_i il rendimento del portafoglio titoli **è una v.a.** combinazione delle R_i con coefficienti le x_i, cioè:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i-esimo titolo.
Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).

Indichiamo con x_i la frazione di capitale investita nel titolo i-esimo e supponiamo di voler investire tutto il capitale, per cui è

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

N.B. le x_i sono quantità scelte dall'investitore quindi **non sono v.a.**

Fissate le x_i il rendimento del portafoglio titoli **è una v.a.** combinazione delle R_i con coefficienti le x_i, cioè:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i-esimo titolo.
Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).

Indichiamo con x_i la frazione di capitale investita nel titolo i-esimo e supponiamo di voler investire tutto il capitale, per cui è

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

N.B. le x_i sono quantità scelte dall'investitore quindi **non sono v.a.**

Fissate le x_i il rendimento del portafoglio titoli **è una v.a.** combinazione delle R_i con coefficienti le x_i, cioè:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

Portfolio selection

Consideriamo n titoli sul mercato finanziario e sia R_i la v.a. che rappresenta il rendimento dell' i-esimo titolo.
Sia μ_i il rendimento atteso di R_i e σ_{ij} la covarianza tra R_i e R_j (quindi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ è la varianza di R_i).

Indichiamo con x_i la frazione di capitale investita nel titolo i-esimo e supponiamo di voler investire tutto il capitale, per cui è

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

N.B. le x_i sono quantità scelte dall'investitore quindi **non sono v.a.**

Fissate le x_i il rendimento del portafoglio titoli **è una v.a.** combinazione delle R_i con coefficienti le x_i, cioè:

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

Portfolio selection

Quindi, come abbiamo visto in precedenza:

$$\mu_R(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{R_i},$$

$$\sigma_R^2(x) = x^T Q x,$$

dove, $q_{ij} = \sigma_{ij}$.

Portfolio selection - formulazione multiobiettivo

Markowitz dimostrò che il comportamento osservato di un investitore poteva essere spiegato considerando il seguente problema *multiobiettivo*

$$\max \mu_R(x), \min \sigma_R^2(x)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, n.$$

in cui si vuole *contemporaneamente* massimizzare il rendimento atteso e minimizzare la varianza. Per questo, il modello è anche noto con il nome di "*mean-variance*"

Il problema

Dati:

- $\mu \in \mathbb{R}^n$: vettore di rendimenti attesi
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice di covarianze

si definisce il problema multiobiettivo:

$$\max \ \mu^\top x, \ \min \tfrac{1}{2} x^\top Q x$$

$$s.t. \ e^\top x = 1, \ x \geq \mathbf{0}_n$$

$e = (1, \ 1, \ldots, 1)^\top$

Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i 50 titoli compresi nell'indice EUROSTOXX
  Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il vettore ideale degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?

Calcolo del vettore ideale z^{id}

Risolvi (separatamente) i due problemi (a singolo obiettivo):

$$\max \ \mu^\top x \qquad\qquad \min \tfrac{1}{2} x^\top Q x$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \qquad s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x^*_\mu \qquad\qquad x^*_\sigma$$

$$z^{id} = \left(\mu^\top x^*_\mu,\ \frac{1}{2}(x^*_\sigma)^\top Q x^*_\sigma\right)^\top$$

Calcolo del vettore ideale z^{id}