Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 14 Maggio 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il problema

Dati:

- $\mu \in \mathbb{R}^n$: vettore di rendimenti attesi
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice di covarianze

si definisce il problema multiobiettivo:

$$\max \ \mu^\top x, \ \min \tfrac{1}{2} x^\top Q x$$

$$s.t. \ e^\top x = 1, \ x \geq \mathbf{0}_n$$

$e = (1, \ 1, \ldots, 1)^\top$

Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i 50 titoli compresi nell'indice EUROSTOXX
  Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il vettore ideale degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?

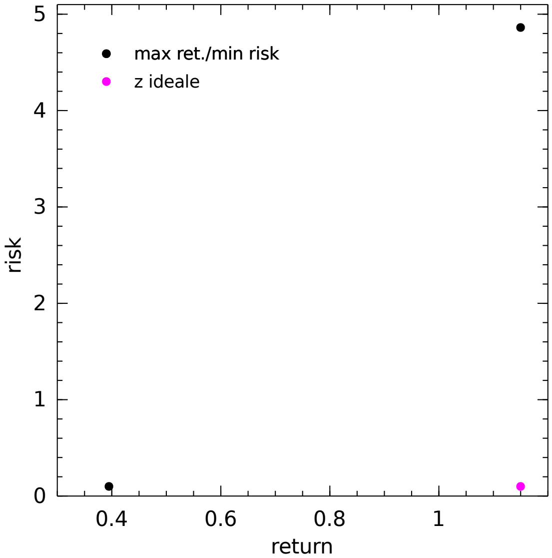
Calcolo del vettore ideale z^{id}

Risolvi (separatamente) i due problemi (a singolo obiettivo):

$$\begin{array}{ll} \max\ \mu^\top x & \min\ \frac{1}{2} x^\top Q x \\ s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n & s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x^*_\mu & x^*_\sigma \end{array}$$

$$z^{id} = \left(\mu^\top x^*_\mu,\ \frac{1}{2} (x^*_\sigma)^\top Q x^*_\sigma \right)^\top$$

Calcolo del vettore ideale z^{id}



Il "decisore"

- singolo obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi globali, allora $f(x^*) = f(\tilde{x})$ e non c'è alcun motivo (ragionevole) per preferire l'uno all'altro
- multi obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi di Pareto (globali), allora si ha necessariamente

$$\begin{array}{ccc} f(x^*) & \not\leq_P & f(\tilde{x}) \\ f(\tilde{x}) & \not\leq_P & f(x^*) \end{array}$$

  cioè, $\tilde{x}$ e x^* sono (tra di loro) non dominati **MA** potrebbero esserci (validi) motivi per preferire l'uno all'altro

Nel caso multi obiettivo è usuale distinguere le seguenti due "figure"

1) ottimizzatore, chi (o cosa) è in grado di determinare una o più soluzione di Pareto per il problema
2) decisore, chi (o cosa) è in grado di scegliere (arbitrariamente) **una** soluzione di Pareto in un insieme di soluzione non dominate

Il "decisore"

- singolo obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi globali, allora $f(x^*) = f(\tilde{x})$ e non c'è alcun motivo (ragionevole) per preferire l'uno all'altro
- multi obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi di Pareto (globali), allora si ha necessariamente

$$\begin{array}{ccc} f(x^*) & \not\leq_P & f(\tilde{x}) \\ f(\tilde{x}) & \not\leq_P & f(x^*) \end{array}$$

  cioè, $\tilde{x}$ e x^* sono (tra di loro) non dominati **MA** potrebbero esserci (validi) motivi per preferire l'uno all'altro

Nel caso multi obiettivo è usuale distinguere le seguenti due "figure"

1) ottimizzatore, chi (o cosa) è in grado di determinare una o più soluzione di Pareto per il problema
2) decisore, chi (o cosa) è in grado di scegliere (arbitrariamente) **una** soluzione di Pareto in un insieme di soluzione non dominate

Il "decisore"

- singolo obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi globali, allora $f(x^*) = f(\tilde{x})$ e non c'è alcun motivo (ragionevole) per preferire l'uno all'altro
- multi obiettivo: se x^* e $\tilde{x}$ sono ottimi di Pareto (globali), allora si ha necessariamente

$$\begin{array}{ccc} f(x^*) & \not\leq_P & f(\tilde{x}) \\ f(\tilde{x}) & \not\leq_P & f(x^*) \end{array}$$

  cioè, $\tilde{x}$ e x^* sono (tra di loro) non dominati **MA** potrebbero esserci (validi) motivi per preferire l'uno all'altro

Nel caso multi obiettivo è usuale distinguere le seguenti due "figure"

1) ottimizzatore, chi (o cosa) è in grado di determinare una o più soluzione di Pareto per il problema
2) decisore, chi (o cosa) è in grado di scegliere (arbitrariamente) **una** soluzione di Pareto in un insieme di soluzione non dominate

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- *Metodi senza preferenze* nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- *Metodi a posteriori* nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- *Metodi a priori* nei quali il decisore specifica le sue preferenza prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- *Metodi senza preferenze* nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- *Metodi a posteriori* nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- *Metodi a priori* nei quali il decisore specifica le sue preferenza prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- *Metodi senza preferenze* nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- *Metodi a posteriori* nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- *Metodi a priori* nei quali il decisore specifica le sue preferenza prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore

Metodi SENZA preferenze

GOAL programming

Dopo aver calcolato il vettore ideale degli obiettivi z^{id} si definisce il problema

$$\begin{array}{l} \min_x \ \|z^{id} - f(x)\|_p \\ s.t.\ x \in \mathcal{F} \end{array}$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma p di un vettore $(1 \leq p \leq \infty)$. In particolare, se $v \in \mathbb{R}^k$

- $1 \leq p < \infty$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |v_i|^p \right)^{1/p}$
- $p = \infty$, $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_k|\}$

GOAL programming

Sono particolarmente interessanti le norme $p = 1$ e $p = \infty$ perchè consentono di ottenere problemi *lineari* partendo da problemi multiobiettivo lineari. Infatti, sia

$$\min_x \; (c_1^\top x, c_2^\top x, \ldots, c_k^\top x)$$
$$s.t.\; Ax \leq b$$

Otteniamo

- quando $p = 1$

$$\min_x \; \sum_{i=1}^{k} c_i^\top x - z_i^{id}$$
$$s.t.\; Ax \leq b$$

- quando $p = \infty$

$$\min_x \; \max_{i=1,\ldots,k} \{c_i^\top x - z_i^{id}\}$$
$$s.t.\; Ax \leq b$$

N.B. $c_i^\top x \geq z_i^{id}$

GOAL programming

- $p = 1$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_{x,\alpha_i} \ & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\ s.t. \ & c_i^\top x - z_i^{id} \le \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \le b \end{aligned}$$

- $p = \infty$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_{x,\alpha} \ & \alpha \\ s.t. \ & c_i^\top x - z_i^{id} \le \alpha, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \le b \end{aligned}$$

GOAL programming ($\|\cdot\|_\infty$)

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min \|\mu^\top x - z_1^{id}, x^\top Qx/2 - z_2^{id}\|_\infty$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

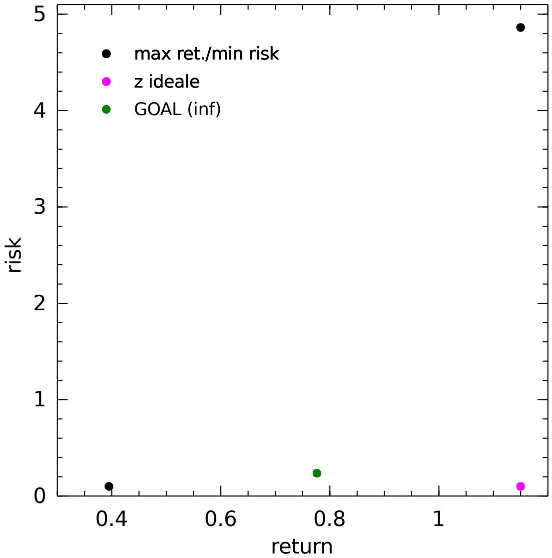
ovvero

$$\begin{aligned} &\min \alpha \\ &s.t.\ z_1^{id} - \mu^\top x \leq \alpha \\ &\qquad x^\top Qx/2 - z_2^{id} \leq \alpha \\ &\qquad e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x^*_\infty$$

GOAL programming ($\|\cdot\|_\infty$)



GOAL programming ($\| \cdot \|_1$)

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min \|\mu^\top x - z_1^{id}, x^\top Qx/2 - z_2^{id}\|_1$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

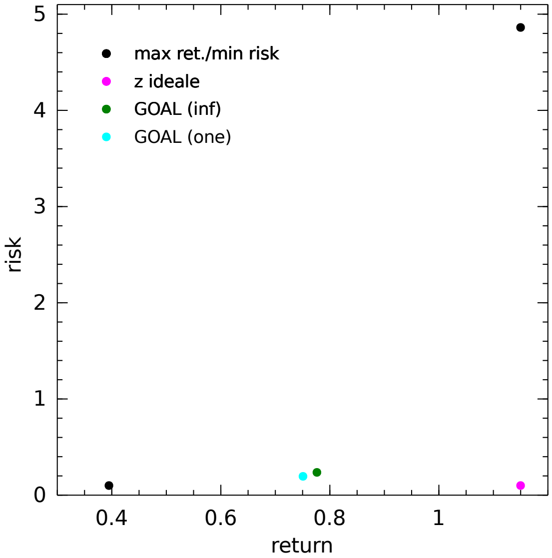
ovvero

$$\begin{array}{l} \min -\mu^\top x + x^\top Qx/2 \\ s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x^*_{one}$$

GOAL programming ($\|\cdot\|_1$)



Metodi "a posteriori"

Metodo dei pesi

0) Poni $X = \emptyset$
1) Scegli w_i, $i = 1, \dots, k$ t.c.

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1 \quad w \geq 0$$

2) Determina

$$x^* \in \begin{array}{l} \text{argmin } \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x) \\ s.t. \; x \in \mathcal{F} \end{array}$$

3) $X = X \cup \{x^*\}$, vai al passo 1)

Metodo dei pesi

Scegli un vettore $w \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{0}_2 \leq_P w$
Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min w_1(-\mu^\top x) + w_2 x^\top Q x/2$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

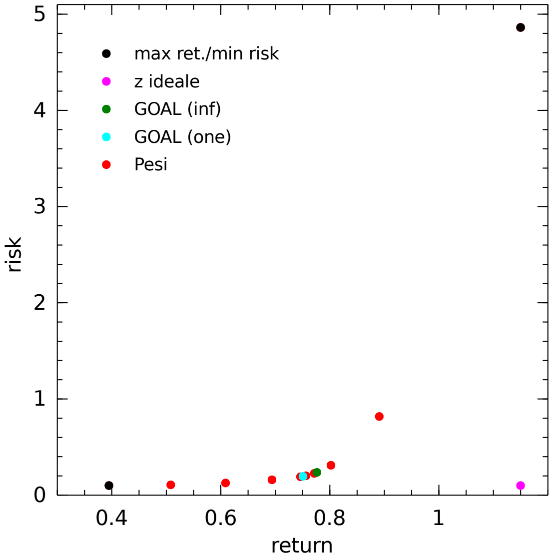
ovvero, ponendo $w_1 = \beta$, $w_2 = (1-\beta)$, $\beta \in [0,1]$

$$\begin{array}{l} \min -\beta\mu^\top x + (1-\beta)x^\top Q x/2 \\ s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{array}$$

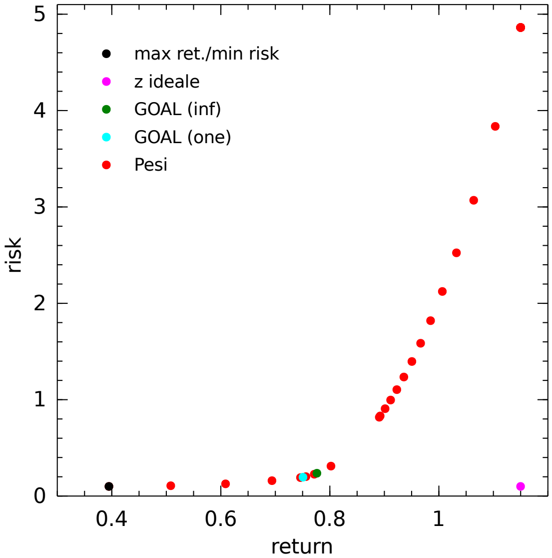
$$\Downarrow$$

$$x^*_\beta$$

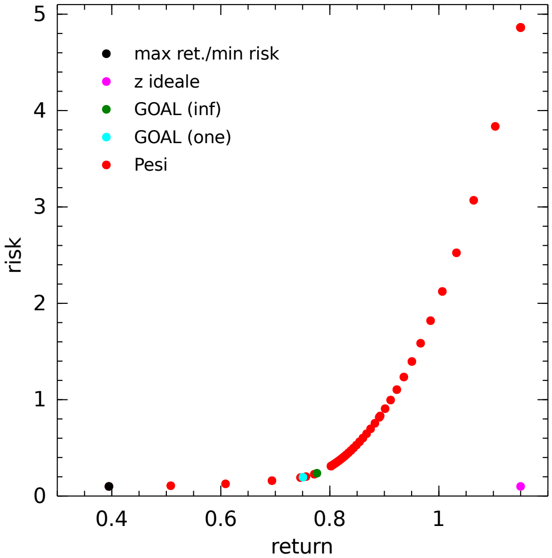
Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0, 1, 10)$)



Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0.89, 1, 20)$)



Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0.7777778, 0.888887, 20)$)



Metodo degli ϵ-vincoli

0) Poni $X = \emptyset$
1) Scegli $\ell \in \{1, \dots, k\}$ e ϵ_i, $i = 1, \dots, k$, $i \neq \ell$
2) Determina

$$
\begin{aligned}
x^* \in \quad & \text{argmin} \;\; f_\ell(x) \\
& s.t. \;\; f_i(x) \leq \epsilon_i, \;\; i = 1, \dots, k, \;\; i \neq \ell \\
& \qquad x \in \mathcal{F}
\end{aligned}
$$

3) $X = X \cup \{x^*\}$, vai al passo 1)

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\begin{aligned} &\min x^\top Qx/2 \\ &s.t.\ \mu^\top x \geq \varepsilon \\ &\qquad e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x_σ^*

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^\top Qx/2$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \mu^\top x \geq \varepsilon \\ & e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x^*_σ

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\begin{aligned} &\min x^\top Qx/2 \\ &s.t.\ \mu^\top x \geq \varepsilon \\ &\qquad e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x^*_σ

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^\top Qx/2$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \mu^\top x \geq \varepsilon \\ & e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x^*_σ

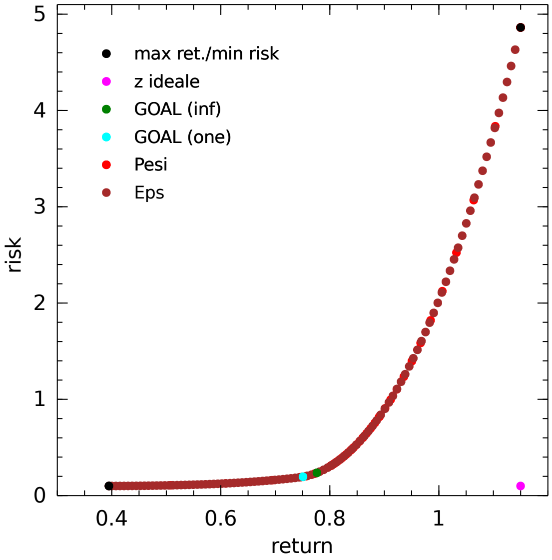
Metodo degli ε-vincoli

$$\min x^\top Qx/2$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \mu^\top x \geq \varepsilon \\ & e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

Domanda: quale è un range "ragionevole" di valori per il parametro ε?

Metodo ε-vincoli ($\varepsilon = \text{linspace}(0.4, 1.14, 100)$)



Metodi “a priori”

Metodo dell'ord. lessicografico

Il decisiore specifica un ordinamento delle f.ob. Siano

$$f_1(x), \dots, f_k(x)$$

le f.ob. ordinate per "importanza" decrescente (dalla più importante alla meno importante)

Metodo dell'ord. lessicografico

- Passo 1

$$x^{*,1} \in \begin{array}{l} \text{argmin} \;\; f_1(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \end{array}$$

- Passo 2

$$x^{*,2} \in \begin{array}{l} \text{argmin} \;\; f_2(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \\ \quad f_1(x) \leq f_1(x^{*,1}) \end{array}$$

- Passo 3

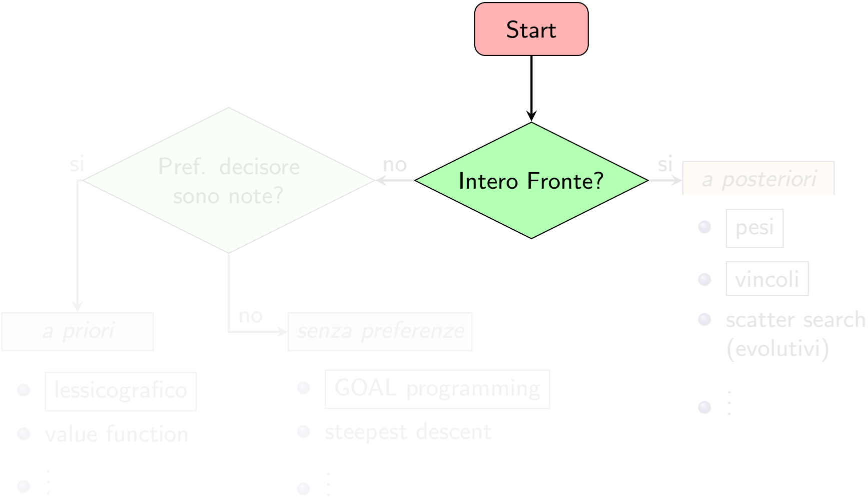
$$x^{*,3} \in \begin{array}{l} \text{argmin} \;\; f_3(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \\ \quad f_1(x) \leq f_1(x^{*,2}) \\ \quad f_2(x) \leq f_2(x^{*,2}) \end{array}$$

$$\vdots$$

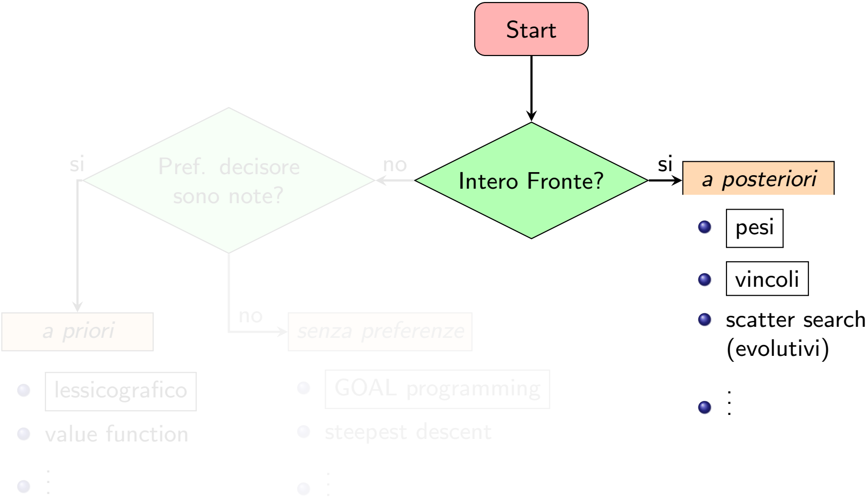
- Passo h

$$x^{*,h} \in \begin{array}{l} \text{argmin} \;\; f_h(x) \\ \quad x \in \mathcal{F} \\ \quad f_i(x) \leq f_i(x^{*,h-1}) \\ \quad i = 1, \dots, h-1 \end{array}$$

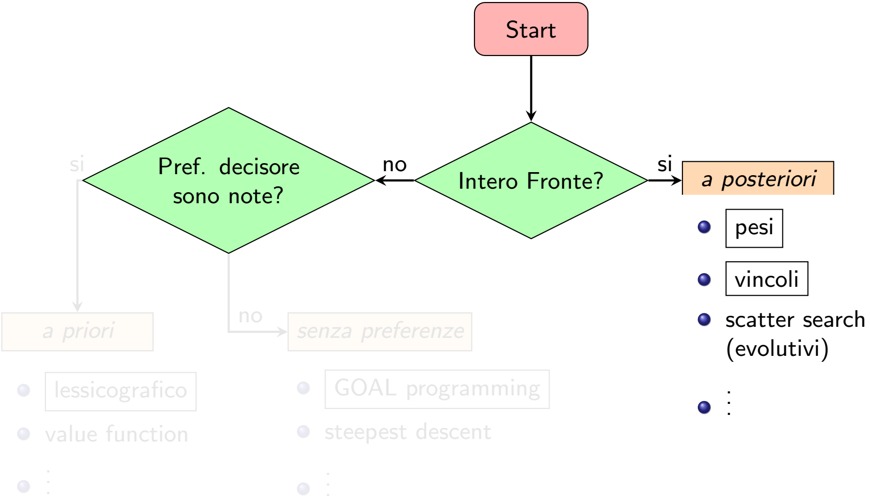
Riassumendo ...



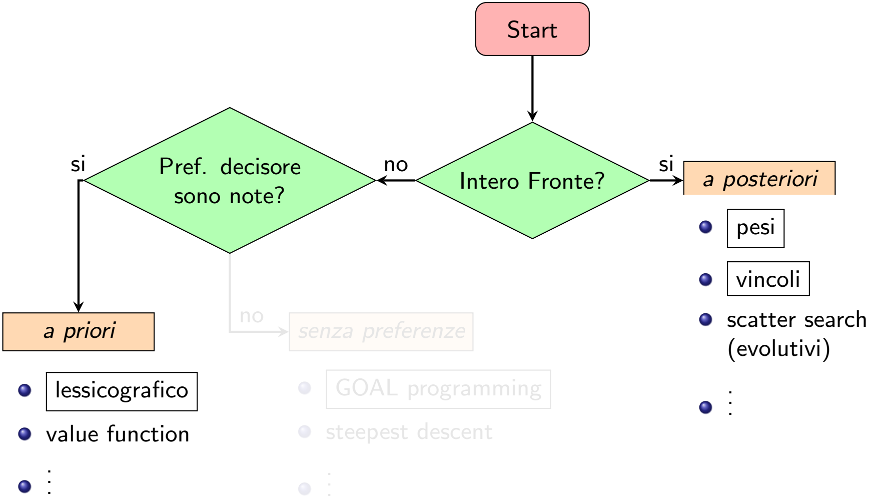
Riassumendo ...



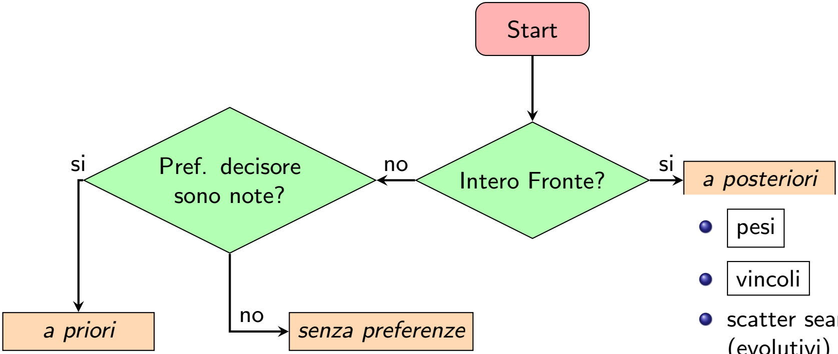
Riassumendo ...



Riassumendo ...



Riassumendo ...



- lessicografico
- value function
- ⋮

- GOAL programming
- steepest descent
- ⋮

- pesi
- vincoli
- scatter search (evolutivi)
- ⋮

Rilevazione OpiS

Codice OpiS: E5I6ELMJ