Ricerca Operativa

G. Liuzzi[1]

Venerdí 15 Novembre 2019

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Motivazioni

Consideriamo un problema lineare P (per comodità in forma standard di minimo)

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned}$$

e supponiamo che ammetta ottimo.

Allora, la fase II del Simplesso terminerà producendo

1. una Base ammissibile ottima B^* e relativa SBA ottima x^*
2. un vettore di costi ridotti $\gamma^* \geq 0_{n-m}$

In una generica iterazione (intermedia) della fase II, è possibile "misurare" quanto la base corrente $\bar{B}$ e relativa SBA $\bar{x}$ sono "distanti" dall'ottimo?

Motivazioni

Consideriamo un problema lineare P (per comodità in forma standard di minimo)

$$\begin{aligned} \min \ & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned}$$

e supponiamo che ammetta ottimo.

Allora, la fase II del Simplesso terminerà producendo

1. una Base ammissibile ottima B^* e relativa SBA ottima x^*
2. un vettore di costi ridotti $\gamma^* \geq 0_{n-m}$

In una generica iterazione (intermedia) della fase II, è possibile "misurare" quanto la base corrente $\bar{B}$ e relativa SBA $\bar{x}$ sono "distanti" dall'ottimo?

Motivazioni

Consideriamo un problema lineare P (per comodità in forma standard di minimo)

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned}$$

e supponiamo che ammetta ottimo.

Allora, la fase II del Simplesso terminerà producendo

1. una Base ammissibile ottima B^* e relativa SBA ottima x^*
2. un vettore di costi ridotti $\gamma^* \geq 0_{n-m}$

In una generica iterazione (intermedia) della fase II, è possibile "misurare" quanto la base corrente $\bar{B}$ e relativa SBA $\bar{x}$ sono "distanti" dall'ottimo?

Lower Bound

Cos'è un **Lower Bound** sul valore ottimo?

Definizione

Una costante L tale che $L \leq c_{B^*}^\top (B^*)^{-1} b$ è un **Lower Bound**

Supponiamo di conoscere un lower bound L per il problema P.

Data la SBA corrente $\bar{x}$ (in generale non ottima), possiamo calcolare

$$\frac{c^\top \bar{x} - L}{1 + |L|} = \text{Optimality Gap (OG)} \geq 0$$

Se OG è **sufficientemente piccolo**, allora potremmo decidere di terminare **prematuramente** la fase II, **risparmiando** iterazioni e costo computazionale.

Lower Bound

Cos'è un **Lower Bound** sul valore ottimo?

Definizione

Una costante L tale che $L \leq c_{B^*}^\top (B^*)^{-1} b$ *è un* **Lower Bound**

Supponiamo di conoscere un lower bound L per il problema P.

Data la SBA corrente $\bar{x}$ (in generale non ottima), possiamo calcolare

$$\frac{c^\top \bar{x} - L}{1 + |L|} = \text{Optimality Gap (OG)} \geq 0$$

Se OG è **sufficientemente piccolo**, allora potremmo decidere di terminare **prematuramente** la fase II, **risparmiando** iterazioni e costo computazionale.

Lower Bound

Cos'è un **Lower Bound** sul valore ottimo?

Definizione

Una costante L tale che $L \leq c_{B^*}^\top (B^*)^{-1} b$ è un **Lower Bound**

Supponiamo di conoscere un lower bound L per il problema P.

Data la SBA corrente $\bar{x}$ (in generale non ottima), possiamo calcolare

$$\frac{c^\top \bar{x} - L}{1 + |L|} = \text{Optimality Gap (OG)} \geq 0$$

Se OG è **sufficientemente piccolo**, allora potremmo decidere di terminare **prematuramente** la fase II, **risparmiando** iterazioni e costo computazionale.

Lower Bound

Cos'è un **Lower Bound** sul valore ottimo?

Definizione

Una costante L tale che $L \leq c_{B^*}^\top (B^*)^{-1} b$ è un **Lower Bound**

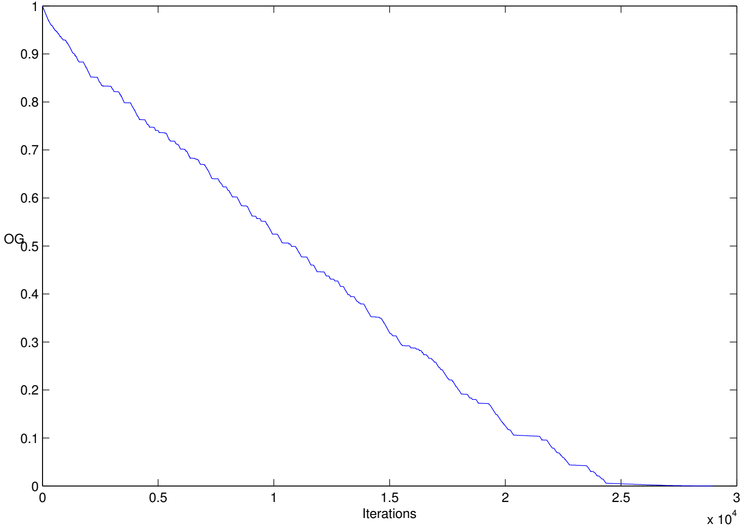
Supponiamo di conoscere un lower bound L per il problema P.

Data la SBA corrente $\bar{x}$ (in generale non ottima), possiamo calcolare

$$\frac{c^\top \bar{x} - L}{1 + |L|} = \text{Optimality Gap (OG)} \geq 0$$

Se OG è **sufficientemente piccolo**, allora potremmo decidere di terminare **prematuramente** la fase II, **risparmiando** iterazioni e costo computazionale.

Esempio



Calcolo di un Lower Bound

Dato

$$
\begin{aligned}
\min \ & c^\top x \\
& Ax = b \\
& x \geq 0_n
\end{aligned}
\qquad \text{(P)}
$$

Consideriamo una combinazione lineare delle equazioni $Ax = b$ con coefficienti le componenti di un vettore $u \in \mathbb{R}^m$, ovvero

$$u^\top Ax = u^\top b$$

Supponiamo che u sia scelto tale che $u^\top A \leq c^\top$. Moltiplicando a destra per x (e ricordando che $x \geq 0_n$) possiamo scrivere

$$u^\top b = u^\top Ax \leq c^\top x \qquad \rightsquigarrow \qquad L(u) = b^\top u \leq c^\top x$$

Calcolo di un Lower Bound

Dato

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned} \qquad \text{(P)}$$

Consideriamo una combinazione lineare delle equazioni $Ax = b$ con coefficienti le componenti di un vettore $u \in \mathbb{R}^m$, ovvero

$$u^\top Ax = u^\top b$$

Supponiamo che u sia scelto tale che $u^\top A \leq c^\top$. Moltiplicando a destra per x (e ricordando che $x \geq 0_n$) possiamo scrivere

$$u^\top b = u^\top Ax \leq c^\top x \qquad \rightsquigarrow \qquad L(u) = b^\top u \leq c^\top x$$

Calcolo di un Lower Bound

Dato

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned} \qquad \text{(P)}$$

Consideriamo una combinazione lineare delle equazioni $Ax = b$ con coefficienti le componenti di un vettore $u \in \mathbb{R}^m$, ovvero

$$u^\top Ax = u^\top b$$

Supponiamo che u sia scelto tale che $u^\top A \leq c^\top$. Moltiplicando a destra per x (e ricordando che $x \geq 0_n$) possiamo scrivere

$$u^\top b = u^\top Ax \leq c^\top x \qquad \rightsquigarrow \qquad L(u) = b^\top u \leq c^\top x$$

Calcolo di un Lower Bound

In altre parole, comunque scelto u tale che

$$A^\top u \leq c$$

otteniamo un bound $L(u) = b^\top u$.

Domanda: tra tutti i bound $L(u)$, come posso selezionare il "migliore"?

N.B. "migliore" = più alto

Risposta: Risolvendo il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max\ & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

(D) è il **duale** del problema (P)

Calcolo di un Lower Bound

In altre parole, comunque scelto u tale che

$$A^\top u \leq c$$

otteniamo un bound $L(u) = b^\top u$.

Domanda: tra tutti i bound $L(u)$, come posso selezionare il "migliore"?

N.B. "migliore" $=$ più alto

Risposta: Risolvendo il seguente problema di PL

$$\begin{array}{ll} \max & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \end{array} \qquad (D)$$

(D) è il **duale** del problema (P)

Calcolo di un Lower Bound

In altre parole, comunque scelto u tale che

$$A^\top u \leq c$$

otteniamo un bound $L(u) = b^\top u$.

Domanda: tra tutti i bound $L(u)$, come posso selezionare il "migliore"?

N.B. "migliore" = più alto

Risposta: Risolvendo il seguente problema di PL

$$\begin{array}{l} \max \; b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array} \qquad \text{(D)}$$

(D) è il **duale** del problema (P)

La coppia Primale-Duale (I)

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array} \qquad (D)$$

Supponiamo di aver risolto (P) con il metodo del Simplesso e che (P) ammetta soluzione ottima

$$\begin{aligned} x^* &= (x_B^*, x_N^*), \text{ con} \\ \gamma^\top &= c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \geq 0_{n-m} \end{aligned}$$

Consideriamo ora la soluzione di (D): $u^* = (c_B^\top B^{-1})^\top$

- $u^\top A = c_B^\top B^{-1}(B \vdots N) = c_B^\top (I \vdots B^{-1}N) = (c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N)$
- $u^\top b = c_B^\top B^{-1} b$

La coppia Primale-Duale (I)

$$(P) \qquad \begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \end{aligned} \qquad (D)$$

Supponiamo di aver risolto (P) con il metodo del Simplesso e che (P) ammetta soluzione ottima

$$\begin{aligned} x^* &= (x_B^*, x_N^*), \text{ con} \\ \gamma^\top &= c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \geq 0_{n-m} \end{aligned}$$

Consideriamo ora la soluzione di (D): $u^* = (c_B^\top B^{-1})^\top$

- $u^\top A = c_B^\top B^{-1}(B \vdots N) = c_B^\top (I \vdots B^{-1}N) = (c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N)$
- $u^\top b = c_B^\top B^{-1} b$

La coppia Primale-Duale (I)

$$(P) \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0_n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ A^\top u \leq c \end{array} \quad (D)$$

Supponiamo di aver risolto (P) con il metodo del Simplesso e che (P) ammetta soluzione ottima

$$\begin{aligned} x^* &= (x_B^*, x_N^*),\ \text{con} \\ \gamma^\top &= c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \geq 0_{n-m} \end{aligned}$$

Consideriamo ora la soluzione di (D): $u^* = (c_B^\top B^{-1})^\top$

- $u^\top A = c_B^\top B^{-1}(B \vdots N) = c_B^\top (I \vdots B^{-1}N) = (c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N)$
- $u^\top b = c_B^\top B^{-1} b$

La coppia Primale-Duale (I)

$$(P) \quad \begin{array}{c} \min\ c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0_n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \max\ b^\top u \\ A^\top u \leq c \end{array} \quad (D)$$

Consideriamo ora la soluzione di (D): $u^* = (c_B^\top B^{-1})^\top$

- $u^\top A = c_B^\top B^{-1}(B \vdots N) = c_B^\top (I \vdots B^{-1}N) = (c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N)$
- $u^\top b = c_B^\top B^{-1} b$

Quindi, ricordando che $\gamma^\top \geq 0_{n-m}$

- $(c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N) \leq c^\top$ cioè u^* è ammissibile per (D)
- $b^\top u^* = c_B^\top B^{-1} b = c^\top x^*$ cioè le f.ob. all'ottimo hanno stesso valore

La coppia Primale-Duale (I)

$$(P) \qquad \begin{array}{c} \min \ c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0_n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \max \ b^\top u \\ A^\top u \leq c \end{array} \qquad (D)$$

Consideriamo ora la soluzione di (D): $u^* = (c_B^\top B^{-1})^\top$

- $u^\top A = c_B^\top B^{-1}(B \vdots N) = c_B^\top (I \vdots B^{-1}N) = (c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N)$
- $u^\top b = c_B^\top B^{-1} b$

Quindi, ricordando che $\gamma^\top \geq 0_{n-m}$

- $(c_B^\top \vdots c_B^\top B^{-1}N) \leq c^\top$ cioè u^* è ammissibile per (D)
- $b^\top u^* = c_B^\top B^{-1} b = c^\top x^*$ cioè le f.ob. all'ottimo hanno stesso valore

La coppia Primale-Duale (II)

Consideriamo ora il problema (Primale)

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} \min & c^\top x + 0_m^\top s \\ & Ax - Is = b \\ & x \geq 0_n, \ s \geq 0_m \end{array}$$

Il duale di quest'ultimo è

$$\begin{array}{ll} \max & b^\top u \\ & u^\top \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} \leq (c^\top \vdots 0_m^\top) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} \max & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0_m \end{array}$$

La coppia Primale-Duale (II)

Consideriamo ora il problema (Primale)

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} \min & c^\top x + 0_m^\top s \\ & Ax - Is = b \\ & x \geq 0_n,\ s \geq 0_m \end{array}$$

Il duale di quest'ultimo è

$$\begin{array}{rl} \max & b^\top u \\ & u^\top \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} \leq (c^\top \vdots\, 0_m^\top) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} \max & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0_m \end{array}$$

La coppia Primale-Duale (II)

Consideriamo ora il problema (Primale)

$$
\begin{array}{rcl}
\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{aligned}
& \quad\rightsquigarrow\quad &
\begin{aligned} \min\ & c^\top x + 0_m^\top s \\ & Ax - Is = b \\ & x \geq 0_n,\ s \geq 0_m \end{aligned}
\end{array}
$$

Il duale di quest'ultimo è

$$
\begin{array}{rcl}
\begin{aligned} \max\ & b^\top u \\ & u^\top \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} \leq (c^\top \vdots\ 0_m^\top) \end{aligned}
& \quad\rightsquigarrow\quad &
\begin{aligned} \max\ & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0_m \end{aligned}
\end{array}
$$

La coppia Primale-Duale (II)

Consideriamo ora il problema (Primale)

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} \min & c^\top x + 0_m^\top s \\ & Ax - Is = b \\ & x \geq 0_n, \; s \geq 0_m \end{array}$$

Il duale di quest'ultimo è

$$\begin{array}{rl} \max & b^\top u \\ & u^\top \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} \leq (c^\top \vdots 0_m^\top) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} \max & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0_m \end{array}$$

La coppia Primale-Duale (II)

La coppia di problemi

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0_m \end{aligned}$$

è nota come coppia primale-duale **simmetrica**

La coppia Primale-Duale (III)

Consideriamo ora il problema (primale)

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x + d^\top y \\ & Ax + Fy = b \\ & Gx + Hy \geq p \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \min\ & c^\top x + d^\top y^+ - d^\top y^- \\ & Ax + Fy^+ - Fy^- = b \\ & Gx + Hy^+ - Hy^- - s = p \\ & x, y^+, y^-, s \geq 0 \end{aligned}$$

il duale di quest'ultimo é

$$\begin{aligned} \max\ & b^\top u + p^\top v \\ & \begin{pmatrix} A^\top & G^\top \\ F^\top & H^\top \\ -F^\top & -H^\top \\ O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \max\ & b^\top u + p^\top v \\ & A^\top u + G^\top v \leq c \\ & F^\top u + H^\top v = d \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

La coppia Primale-Duale (III)

Consideriamo ora il problema (primale)

$$\begin{array}{l} \min\ c^\top x + d^\top y \\ \quad Ax + Fy = b \\ \quad Gx + Hy \geq p \\ \quad x \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x + d^\top y^+ - d^\top y^- \\ \quad Ax + Fy^+ - Fy^- = b \\ \quad Gx + Hy^+ - Hy^- - s = p \\ \quad x, y^+, y^-, s \geq 0 \end{array}$$

il duale di quest'ultimo é

$$\begin{array}{l} \max\ b^\top u + p^\top v \\ \begin{pmatrix} A^\top & G^\top \\ F^\top & H^\top \\ -F^\top & -H^\top \\ O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u + p^\top v \\ \quad A^\top u + G^\top v \leq c \\ \quad F^\top u + H^\top v = d \\ \quad v \geq 0 \end{array}$$

La coppia Primale-Duale (III)

Consideriamo ora il problema (primale)

$$\begin{array}{l} \min\ c^\top x + d^\top y \\ \quad Ax + Fy = b \\ \quad Gx + Hy \geq p \\ \quad x \geq 0 \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x + d^\top y^+ - d^\top y^- \\ \quad Ax + Fy^+ - Fy^- = b \\ \quad Gx + Hy^+ - Hy^- - s = p \\ \quad x, y^+, y^-, s \geq 0 \end{array}$$

il duale di quest'ultimo é

$$\begin{array}{l} \max\ b^\top u + p^\top v \\ \begin{pmatrix} A^\top & G^\top \\ F^\top & H^\top \\ -F^\top & -H^\top \\ O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u + p^\top v \\ \quad A^\top u + G^\top v \leq c \\ \quad F^\top u + H^\top v = d \\ \quad v \geq 0 \end{array}$$

La coppia Primale-Duale (III)

Consideriamo ora il problema (primale)

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x + d^\top y \\ & Ax + Fy = b \\ & Gx + Hy \geq p \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \min\ & c^\top x + d^\top y^+ - d^\top y^- \\ & Ax + Fy^+ - Fy^- = b \\ & Gx + Hy^+ - Hy^- - s = p \\ & x, y^+, y^-, s \geq 0 \end{aligned}$$

il duale di quest'ultimo é

$$\begin{aligned} \max\ & b^\top u + p^\top v \\ & \begin{pmatrix} A^\top & G^\top \\ F^\top & H^\top \\ -F^\top & -H^\top \\ O & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ d \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \max\ & b^\top u + p^\top v \\ & A^\top u + G^\top v \leq c \\ & F^\top u + H^\top v = d \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

La coppia Primale-Duale (III)

$$\begin{array}{llcll} \min & c^\top x + d^\top y & & \max & b^\top u + p^\top v \\ & Ax + Fy = b \quad (u) & & & A^\top u + G^\top v \leq c \quad (x) \\ & Gx + Hy \geq p \quad (v) & \rightsquigarrow & & F^\top u + H^\top v = d \quad (y) \\ & x \geq 0 & & & v \geq 0 \end{array}$$

Possiamo dedurre queste semplici regole

1. il duale di un problema di min è un problema di max
2. ad ogni vincolo di $=$ del primale, corrisp. una var. NON vincolata in segno nel duale
3. ad ogni vincolo di $\geq$ del primale, corrisp. una var. vincolata in segno nel duale
4. ad ogni var. vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $\leq$ nel duale
5. ad ogni var. NON vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $=$ nel duale

La coppia Primale-Duale (III)

$$\begin{array}{llcll} \min & c^\top x + d^\top y & & \max & b^\top u + p^\top v \\ & Ax + Fy = b \quad (u) & \rightsquigarrow & & A^\top u + G^\top v \le c \quad (x) \\ & Gx + Hy \ge p \quad (v) & & & F^\top u + H^\top v = d \quad (y) \\ & x \ge 0 & & & v \ge 0 \end{array}$$

Possiamo dedurre queste semplici regole

1. il duale di un problema di min è un problema di max
2. ad ogni vincolo di $=$ del primale, corrisp. una var. NON vincolata in segno nel duale
3. ad ogni vincolo di $\ge$ del primale, corrisp. una var. vincolata in segno nel duale
4. ad ogni var. vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $\le$ nel duale
5. ad ogni var. NON vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $=$ nel duale

La coppia Primale-Duale (III)

$$\begin{array}{llll} \min & c^\top x + d^\top y & & \\ & Ax + Fy = b & (u) & \\ & Gx + Hy \geq p & (v) & \\ & x \geq 0 & & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{lll} \max & b^\top u + p^\top v & \\ & A^\top u + G^\top v \leq c & (x) \\ & F^\top u + H^\top v = d & (y) \\ & v \geq 0 & \end{array}$$

Possiamo dedurre queste semplici regole

1. il duale di un problema di min è un problema di max
2. ad ogni vincolo di $=$ del primale, corrisp. una var. NON vincolata in segno nel duale
3. ad ogni vincolo di $\geq$ del primale, corrisp. una var. vincolata in segno nel duale
4. ad ogni var. vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $\leq$ nel duale
5. ad ogni var. NON vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $=$ nel duale

La coppia Primale-Duale (III)

$$\begin{array}{llll} \min & c^\top x + d^\top y & & \\ & Ax + Fy = b & (u) & \\ & Gx + Hy \geq p & (v) & \\ & x \geq 0 & & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{lll} \max & b^\top u + p^\top v & \\ & A^\top u + G^\top v \leq c & (x) \\ & F^\top u + H^\top v = d & (y) \\ & v \geq 0 & \end{array}$$

Possiamo dedurre queste semplici regole

1. il duale di un problema di min è un problema di max
2. ad ogni vincolo di $=$ del primale, corrisp. una var. NON vincolata in segno nel duale
3. ad ogni vincolo di $\geq$ del primale, corrisp. una var. vincolata in segno nel duale
4. ad ogni var. vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $\leq$ nel duale
5. ad ogni var. NON vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $=$ nel duale

La coppia Primale-Duale (III)

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x + d^\top y \\ & Ax + Fy = b \quad (u) \\ & Gx + Hy \geq p \quad (v) \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} \max & b^\top u + p^\top v \\ & A^\top u + G^\top v \leq c \quad (x) \\ & F^\top u + H^\top v = d \quad (y) \\ & v \geq 0 \end{array}$$

Possiamo dedurre queste semplici regole

1. il duale di un problema di min è un problema di max
2. ad ogni vincolo di $=$ del primale, corrisp. una var. NON vincolata in segno nel duale
3. ad ogni vincolo di $\geq$ del primale, corrisp. una var. vincolata in segno nel duale
4. ad ogni var. vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $\leq$ nel duale
5. ad ogni var. NON vincolata in segno nel primale corrisp. un vincolo di $=$ nel duale

Costruzione del Duale

Ricapitolando:

Primale (min)	Duale (max)
vincolo $\geq$	variabile ≥ 0
vincolo $=$	variabile non vinc.
variabile ≥ 0	vincolo $\leq$
variabile non vinc.	vincolo $=$

Costruzione del Duale

Ricapitolando:

Primale (min)	Duale (max)
vincolo $\geq$	variabile ≥ 0
vincolo $=$	variabile non vinc.
variabile ≥ 0	vincolo $\leq$
variabile non vinc.	vincolo $=$

Costruzione del Duale

Ricapitolando:

Primale (min)	Duale (max)
vincolo $\geq$	variabile ≥ 0
vincolo $=$	variabile non vinc.
variabile ≥ 0	vincolo $\leq$
variabile non vinc.	vincolo $=$

Costruzione del Duale

Ricapitolando:

Primale (min)	Duale (max)
vincolo $\geq$	variabile ≥ 0
vincolo $=$	variabile non vinc.
variabile ≥ 0	vincolo $\leq$
variabile non vinc.	vincolo $=$

Duale del Duale?

$$\begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min\ -b^\top u \\ \quad -A^\top u \geq -c \end{array} \quad \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ -c^\top x \\ \quad -Ax = -b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}$$

Quindi, il Duale del Duale è il Primale !!

Duale del Duale?

$$\begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \min\ -b^\top u \\ \quad -A^\top u \geq -c \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} \max\ -c^\top x \\ \quad -Ax = -b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}$$

Quindi, il Duale del Duale è il Primale !!

Duale del Duale?

$$
\begin{array}{l} \min \ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l} \max \ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l} \min \ -b^\top u \\ \quad -A^\top u \geq -c \end{array}
\quad \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l} \max \ -c^\top x \\ \quad -Ax = -b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l} \min \ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}
$$

Quindi, il **Duale del Duale è il Primale** !!

Duale del Duale?

$$
\begin{array}{l} \min \ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{l} \max \ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{l} \min \ -b^\top u \\ \quad -A^\top u \geq -c \end{array}
\rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{array}{l} \max \ -c^\top x \\ \quad -Ax = -b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{l} \min \ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}
$$

Quindi, il **Duale del Duale è il Primale !!**

Duale del Duale?

$$\begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min\ -b^\top u \\ \quad -A^\top u \geq -c \end{array} \quad \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ -c^\top x \\ \quad -Ax = -b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0_n \end{array}$$

Quindi, il **Duale del Duale è il Primale** !!

Teorema della Dualità (debole)

Si consideri una coppia di problemi primale-duale, p.es.

$$\text{(Primale)} \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \\ \quad u \geq 0_m \end{array} \quad \text{(Duale)}$$

Teorema (Dualità debole)

Comunque presa una coppia primale-duale di soluzioni ammissibili $(\bar{x}, \bar{u})$, risulta

$$b^\top \bar{u} \leq c^\top \bar{x}$$

Teorema della Dualità (debole)

Si consideri una coppia di problemi primale-duale, p.es.

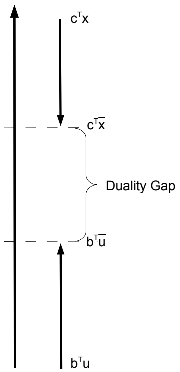
$$
\text{(Primale)} \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \\ \quad u \geq 0_m \end{array} \quad \text{(Duale)}
$$

Teorema (Dualità debole)

Comunque presa una coppia primale-duale di soluzioni ammissibili $(\bar{x}, \bar{u})$, *risulta*

$$b^\top \bar{u} \leq c^\top \bar{x}$$

Teorema della Dualità (debole)

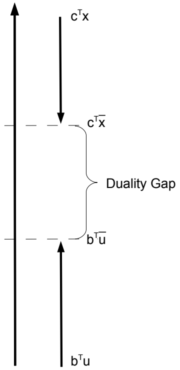


$$\text{Duality Gap} = c^\top \bar{x} - b^\top \bar{u} \geq 0$$

Dal Teorema della Dualità (debole) segue (abbastanza) facilmente che:

- se il **primale è illimitato inferiormente**, allora il **duale è inammissibile**
- se il **duale è illimitato superiormente**, allora il **primale è inammissibile**
- se $\bar{x}$ e $\bar{u}$ tali che $b^\top \bar{u} = c^\top \bar{x}$, allora **sono soluzioni ottime** per i rispettivi problemi

Teorema della Dualità (debole)

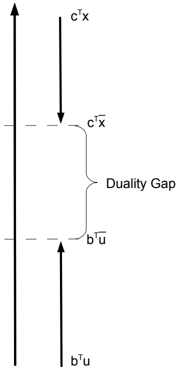


Duality Gap $= c^\top \bar{x} - b^\top \bar{u} \geq 0$

Dal Teorema della Dualità (debole) segue (abbastanza) facilmente che:

- se il **primale è illimitato inferiormente**, allora il **duale è inammissibile**
- se il **duale è illimitato superiormente**, allora il **primale è inammissibile**
- se $\bar{x}$ e $\bar{u}$ tali che $b^\top \bar{u} = c^\top \bar{x}$, allora **sono soluzioni ottime** per i rispettivi problemi

Teorema della Dualità (debole)

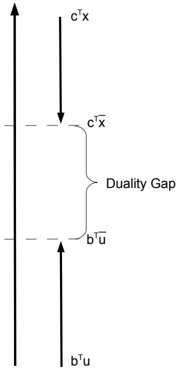


Duality Gap $= c^\top \bar{x} - b^\top \bar{u} \geq 0$

Dal Teorema della Dualità (debole) segue (abbastanza) facilmente che:

- se il **primale è illimitato inferiormente**, allora il **duale è inammissibile**
- se il **duale è illimitato superiormente**, allora il **primale è inammissibile**
- se $\bar{x}$ e $\bar{u}$ tali che $b^\top \bar{u} = c^\top \bar{x}$, allora **sono soluzioni ottime** per i rispettivi problemi

Teorema della Dualità (debole)



Duality Gap $= c^\top \bar{x} - b^\top \bar{u} \geq 0$

Dal Teorema della Dualità (debole) segue (abbastanza) facilmente che:

- se il **primale è illimitato inferiormente**, allora il **duale è inammissibile**
- se il **duale è illimitato superiormente**, allora il **primale è inammissibile**
- se $\bar{x}$ e $\bar{u}$ tali che $b^\top \bar{u} = c^\top \bar{x}$, allora **sono soluzioni ottime** per i rispettivi problemi

A questo punto...

Primale (illimitato) - Duale (inammissibile)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad \begin{array}{l} \min\ -2x_1 - x_2 \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -4 \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -2 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ -4u_1 - 2u_2 \\ \quad -u_1 - u_2 \leq -2 \\ \quad u_1 + u_2 \leq -1 \\ \quad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \end{array} \quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio1.jl`

Primale (illimitato) - Duale (inammissibile)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad
\begin{array}{l}
\min \ -2x_1 - x_2 \\
\quad -x_1 + x_2 \geq -4 \\
\quad -x_1 + x_2 \geq -2 \\
\quad x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l}
\max \ -4u_1 - 2u_2 \\
\quad -u_1 - u_2 \leq -2 \\
\quad u_1 + u_2 \leq -1 \\
\quad u_1 \geq 0, \ \ u_2 \geq 0
\end{array}
\quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio1.jl`

esempio1.jl

```
using JuMP
using Gurobi

mp = Model(with_optimizer(Gurobi.Optimizer,Presolve=0, OutputFlag=0))

###########################################
# DEFINIZIONE DEL PRIMALE
###########################################
@variable(mp, x1 >= 0 )
@variable(mp, x2 >= 0 )
@objective(mp, Min, -2x1 -x2 )
@constraint(mp, -x1 + x2 >= -4 )
@constraint(mp, -x1 + x2 >= -2 )

...

optimize!(mp)

statusp = termination_status(mp)
```

Risolutori disponibili per Julia–JuMP

Solver	solver=	License	LP	SOCP	MIP	NLP
Cbc	CbcSolver()	EPL			X	
Clp	ClpSolver()	EPL	X			
CPLEX	CplexSolver()	Comm.	X	X	X	
ECOS	ECOSSolver()	GPL	X	X		
GLPK	GLPKSolver[LP/MIP]()	GPL	X		X	
Gurobi	GurobiSolver()	Comm.	X	X	X	
Ipopt	IpoptSolver()	EPL	X			X
KNITRO	KnitroSolver()	Comm.				X
MOSEK	MosekSolver()	Comm.	X	X	X	X
NLopt	NLoptSolver()	LGPL				X
SCS	SCSSolver()	MIT	X	X		

Primale (inammissibile) - Duale (illimitato)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad
\begin{array}{l}
\min \ -2x_1 - x_2 \\
\quad x_1 + x_2 \geq 4 \\
\quad -x_1 - x_2 \geq -2 \\
\quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l}
\max \ 4u_1 - 2u_2 \\
\quad u_1 - u_2 \leq -2 \\
\quad u_1 - u_2 \leq -1 \\
\quad u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0
\end{array}
\quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio2.jl`

Primale (inammissibile) - Duale (illimitato)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad \begin{array}{l} \min\ -2x_1 - x_2 \\ \quad x_1 + x_2 \geq 4 \\ \quad -x_1 - x_2 \geq -2 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ 4u_1 - 2u_2 \\ \quad u_1 - u_2 \leq -2 \\ \quad u_1 - u_2 \leq -1 \\ \quad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \end{array} \quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio2.jl`

Primale (inammissibile) - Duale (inammissibile)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad
\begin{array}{l}
\min\ -2x_1 - x_2 \\
\quad x_1 - x_2 \geq 4 \\
\quad -x_1 + x_2 \geq -2 \\
\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l}
\max\ 4u_1 - 2u_2 \\
\quad u_1 - u_2 \leq -2 \\
\quad -u_1 + u_2 \leq -1 \\
\quad u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0
\end{array}
\quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio3.jl`

Primale (inammissibile) - Duale (inammissibile)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad
\begin{array}{l}
\min \; -2x_1 - x_2 \\
\quad x_1 - x_2 \geq 4 \\
\quad -x_1 + x_2 \geq -2 \\
\quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{l}
\max \; 4u_1 - 2u_2 \\
\quad u_1 - u_2 \leq -2 \\
\quad -u_1 + u_2 \leq -1 \\
\quad u_1 \geq 0, \; u_2 \geq 0
\end{array}
\quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio3.jl`

Primale (ottimo) - Duale (ottimo)

Consideriamo il problema

$$\text{(primale)} \qquad \begin{array}{l} \min\ -2x_1 - x_2 \\ \quad -x_1 - x_2 \geq -4 \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -2 \\ \quad x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{l} \max\ -4u_1 - 2u_2 \\ \quad -u_1 - u_2 \leq -2 \\ \quad -u_1 + u_2 \leq -1 \\ \quad u_1 \geq 0,\ \ u_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(duale)}$$

Julia script: `esempio4.jl`

Primale (ottimo) - Duale (ottimo)

Consideriamo il problema

$$
\text{(primale)} \quad \begin{array}{l} \min \ -2x_1 - x_2 \\ \quad -x_1 - x_2 \geq -4 \\ \quad -x_1 + x_2 \geq -2 \\ \quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max \ -4u_1 - 2u_2 \\ \quad -u_1 - u_2 \leq -2 \\ \quad -u_1 + u_2 \leq -1 \\ \quad u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0 \end{array} \quad \text{(duale)}
$$

Julia script: `esempio4.jl`

Cosa mancherebbe?

Abbiamo visto che: **se** $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono tali che:

1. $A\bar{x} \geq b,\ \bar{x} \geq 0$ (ammissibilità primale)
2. $A^\top \bar{u} \leq c,\ \bar{u} \geq 0$ (ammissibilità duale)
3. $c^\top \bar{x} = b^\top \bar{u}$ (uguaglianza delle f.ob.)

allora $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono soluzioni ottime.

... e il viceversa?

Cioè, **se** $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono ottime, **allora** valgono 1 , 2 e 3 ?

Teorema della Dualità (forte)

Sempre con riferimento ad una certa coppia primale-duale, p.es.

$$
\text{(Primale)} \quad \begin{array}{l} \min\ c^\top x \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \max\ b^\top u \\ \quad A^\top u \leq c \\ \quad u \geq 0_m \end{array} \quad \text{(Duale)}
$$

Teorema (Dualità forte)

Se il primale ammette ottimo x^* allora anche il duale ammette ottimo u^* e viceversa. Inoltre, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale all'ottimo coincidono cioè risulta

$$c^\top x^* = b^\top u^*$$

Teorema della Dualità (forte)

Sempre con riferimento ad una certa coppia primale-duale, p.es.

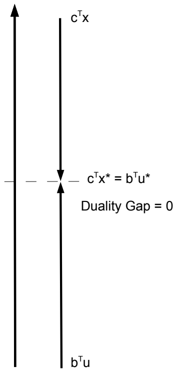
$$\text{(Primale)} \quad \begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} \max & b^\top u \\ & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0_m \end{array} \quad \text{(Duale)}$$

Teorema (Dualità forte)

Se il primale ammette ottimo x^* allora anche il duale ammette ottimo u^* e viceversa. Inoltre, i valori delle funzioni obiettivo primale e duale all'ottimo coincidono cioè risulta

$$c^\top x^* = b^\top u^*$$

Teorema della Dualità (forte)



$$\text{Duality Gap} = c^\top x^* - b^\top u^* = 0$$

All'ottimo i valori delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono (sempre)

Condizioni di Ottimalità

Data una coppia primale-duale

$$(P) \quad \begin{array}{c} \min\ c^\top x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \max\ b^\top u \\ A^\top u \leq c \\ u \geq 0_m \end{array} \quad (D)$$

Teorema

Condizione Necessaria e Sufficiente *affinché* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ *siano ottimi, rispettivamente per (P) e (D), è che:*

1. $A\bar{x} \geq b,\ \bar{x} \geq 0$ *(ammissibilità primale)*
2. $A^\top \bar{u} \leq c,\ \bar{u} \geq 0$ *(ammissibilità duale)*
3. $c^\top \bar{x} = b^\top \bar{u}$ *(uguaglianza delle f.ob.)*

Condizioni di Ottimalità

Data una coppia primale-duale

$$(P) \quad \begin{array}{c} \min\ c^\top x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \max\ b^\top u \\ A^\top u \leq c \\ u \geq 0_m \end{array} \quad (D)$$

Teorema

Condizione Necessaria e Sufficiente *affinché* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ *siano ottimi, rispettivamente per (P) e (D), è che:*

1. $A\bar{x} \geq b,\ \bar{x} \geq 0$ *(ammissibilità primale)*
2. $A^\top \bar{u} \leq c,\ \bar{u} \geq 0$ *(ammissibilità duale)*
3. $c^\top \bar{x} = b^\top \bar{u}$ *(uguaglianza delle f.ob.)*

Riassumendo...

... che può succedere?

		DUALE		
		Ottimo finito	Ill. sup.	Inammiss.
PRIMALE	Ottimo finito	SI	NO	NO
	Ill. inf.	NO	NO	SI
	Inammiss.	NO	SI	SI

- Teorema della Dualità **debole** ($c^\top x \geq b^\top u$)
- Teorema della Dualità **forte** ($c^\top x^* = b^\top u^*$)

Riassumendo...

... che può succedere?

		DUALE		
		Ottimo finito	Ill. sup.	Inammiss.
PRIMALE	Ottimo finito	**SI**	**NO**	**NO**
	Ill. inf.	**NO**	**NO**	**SI**
	Inammiss.	**NO**	**SI**	**SI**

- Teorema della Dualità **debole** $(c^\top x \geq b^\top u)$
- Teorema della Dualità **forte** $(c^\top x^* = b^\top u^*)$

Riassumendo...

... che può succedere?

		DUALE		
		Ottimo finito	Ill. sup.	Inammiss.
PRIMALE	Ottimo finito	**SI**	**NO**	**NO**
	Ill. inf.	**NO**	**NO**	**SI**
	Inammiss.	**NO**	**SI**	**SI**

- Teorema della Dualità **debole** ($c^\top x \geq b^\top u$)
- Teorema della Dualità **forte** ($c^\top x^* = b^\top u^*$)

Riassumendo...

... che può succedere?

		DUALE		
		Ottimo finito	Ill. sup.	Inammiss.
PRIMALE	Ottimo finito	**SI**	**NO**	**NO**
	Ill. inf.	**NO**	**NO**	**SI**
	Inammiss.	**NO**	**SI**	**SI**

- Teorema della Dualità **debole** ($c^\top x \geq b^\top u$)
- Teorema della Dualità **forte** ($c^\top x^* = b^\top u^*$)

Condizioni di Complementarità

Sempre con riferimento ad una certa coppia primale-duale, p.es.

$$
(P) \quad \begin{array}{c} \min \; c^\top x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \max \; b^\top u \\ A^\top u \leq c \\ u \geq 0_m \end{array} \quad (D)
$$

Proposizione (Cond. di complementarità)

Sia $\bar{x}$ una sol. ammissibile di (P) e $\bar{u}$ una sol. ammissibile di (D). Allora, $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono sol. ottime di (P) e (D) **se e solo se**

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^\top (A\bar{x} - b) &= 0 \\
\bar{x}^\top (c - A^\top \bar{u}) &= 0.
\end{aligned}
$$

Condizioni di Complementarità

Sempre con riferimento ad una certa coppia primale-duale, p.es.

$$
(P) \quad \begin{array}{r} \min \ c^\top x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0_n \end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{r} \max \ b^\top u \\ A^\top u \leq c \\ u \geq 0_m \end{array} \quad (D)
$$

Proposizione (Cond. di complementarità)

Sia $\bar{x}$ una sol. ammissibile di (P) e $\bar{u}$ una sol. ammissibile di (D). Allora, $\bar{x}$ e $\bar{u}$ sono sol. ottime di (P) e (D) **se e solo se**

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^\top (A\bar{x} - b) &= 0 \\
\bar{x}^\top (c - A^\top \bar{u}) &= 0.
\end{aligned}
$$