Ricerca Operativa

G. Liuzzi[1]

Venerdí 29 Novembre 2019

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Un problema di Capital Budgeting

Un piccolo investitore deve stabilire come investire il proprio capitale potendo scegliere tra **6 differenti investimenti**. L'investitore dispone di un **budget di 100000€** e conosce i **costi di attivazione** nonché il **Net Present Value** (NPV) di ciascuno di essi come riportato nella tabella che segue:

	costo $\times$1000€	NPV
inv.1	100	40
inv.2	50	35
inv.3	45	18
inv.4	20	4
inv.5	10	10
inv.6	5	2

Formulazione matematica

- **Variabili** di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'inv. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- **Funzione obiettivo**:

$$NPV_{tot} = f(x) = 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6.$$

- **Vincoli**:

$$C_{tot} = g(x) = 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 \leq 100$$

Formulazione matematica

Il problema di PL intera (0/1) è

$$\begin{aligned} \max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\ s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 \leq 100 \\ & x_i \in \{0,1\}^6 \end{aligned}$$

Pianificazione degli investimenti

- Sono disponibili **n** progetti di investimento (che possono essere o non essere realizzati)
- Si vuole effettuare l'analisi entro un orizonte temporale composto di T periodi, cioè $\{1, 2, \dots, T\}$
- Per ciascun progetto **i** è noto il flusso di cassa in ciascun periodo **t**, $\mathbf{a}_{it}$ (conv. $a_{it} > 0$ è un esborso)
- Per ciascun progetto **i** è noto il guadagno netto $c_i = -\sum_{t=1}^{T} a_{it}$
- Per ciascun periodo **t** si dispone di un budget limitato $\mathbf{b}_t$

Problema: decidere quali progetti attivare in modo da avere il maggior guadagno netto complessivo e rispettando tutti i vincoli di budget

Pianificazione degli investimenti

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prog. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: $\max \sum_{i=1}^{n} c_i$

Vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \leq b_t, \qquad \text{per ogni } \; t = 1, \ldots, T$$

Pianificazione degli investimenti

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prog. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: $\max \sum_{i=1}^{n} c_i$

Vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \leq b_t, \qquad \text{per ogni } t = 1, \dots, T$$

Pianificazione degli investimenti

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prog. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: max $\sum_{i=1}^{n} c_i$

Vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \leq b_t, \qquad \text{per ogni} \quad t = 1, \dots, T$$

Pianificazione degli investimenti

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il prog. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

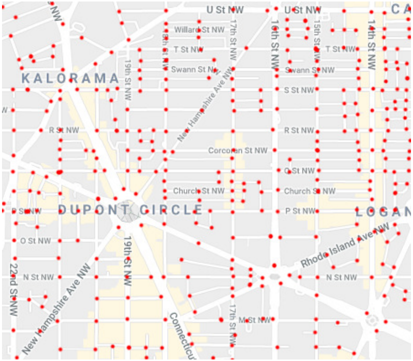
Obiettivo: $\max \sum_{i=1}^{n} c_i$

Vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_i \leq b_t, \qquad \text{per ogni} \quad t = 1, \ldots, T$$

Telesorveglianza stradale

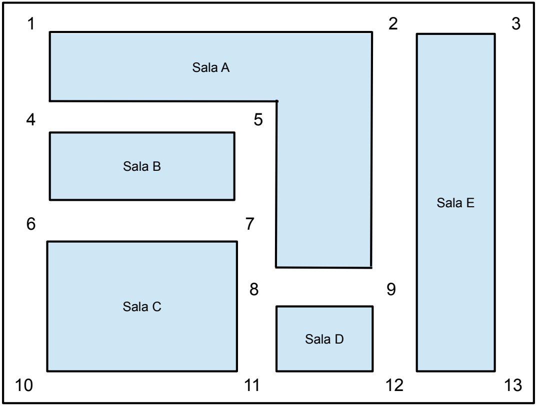
Centro cittadino



Nei punti rossi è possibile installare delle telecamere che possono sorvegliare le strade incidenti

Telesorveglianza in un museo

Piantina di un museo



Agli incroci dei corridoi (punti numerati) è possibile installare delle telecamere che possono sorvegliare i corridoi incidenti

Telesorveglianza

Problema: Decidere dove piazzare le telecamere affinché:

- tutti i corridoi risultino sorvegliati
- si utilizzi il minor numero di telecamere

Telesorveglianza

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se in i si piazza una telecamera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{13} x_i$

Vincoli:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_4 + x_5 &\geq 1 \\ x_6 + x_7 &\geq 1 \\ x_8 + x_9 &\geq 1 \\ x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 1 \\ x_1 + x_4 + x_6 + x_{10} &\geq 1 \\ x_5 + x_7 + x_8 + x_{11} &\geq 1 \\ x_2 + x_9 + x_{12} &\geq 1 \\ x_3 + x_{13} &\geq 1 \end{aligned}$$

Telesorveglianza

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se in i si piazza una telecamera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{13} x_i$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\
x_4 + x_5 &\geq 1 \\
x_6 + x_7 &\geq 1 \\
x_8 + x_9 &\geq 1 \\
x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 1 \\
x_1 + x_4 + x_6 + x_{10} &\geq 1 \\
x_5 + x_7 + x_8 + x_{11} &\geq 1 \\
x_2 + x_9 + x_{12} &\geq 1 \\
x_3 + x_{13} &\geq 1
\end{aligned}$$

Telesorveglianza

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se in i si piazza una telecamera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: min $\sum_{i=1}^{13} x_i$

Vincoli:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_4 + x_5 &\geq 1 \\ x_6 + x_7 &\geq 1 \\ x_8 + x_9 &\geq 1 \\ x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 1 \\ x_1 + x_4 + x_6 + x_{10} &\geq 1 \\ x_5 + x_7 + x_8 + x_{11} &\geq 1 \\ x_2 + x_9 + x_{12} &\geq 1 \\ x_3 + x_{13} &\geq 1 \end{aligned}$$

Telesorveglianza

Variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se in i si piazza una telecamera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: min $\sum_{i=1}^{13} x_i$

Vincoli:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\
x_4 + x_5 &\geq 1 \\
x_6 + x_7 &\geq 1 \\
x_8 + x_9 &\geq 1 \\
x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 1 \\
x_1 + x_4 + x_6 + x_{10} &\geq 1 \\
x_5 + x_7 + x_8 + x_{11} &\geq 1 \\
x_2 + x_9 + x_{12} &\geq 1 \\
x_3 + x_{13} &\geq 1
\end{aligned}$$

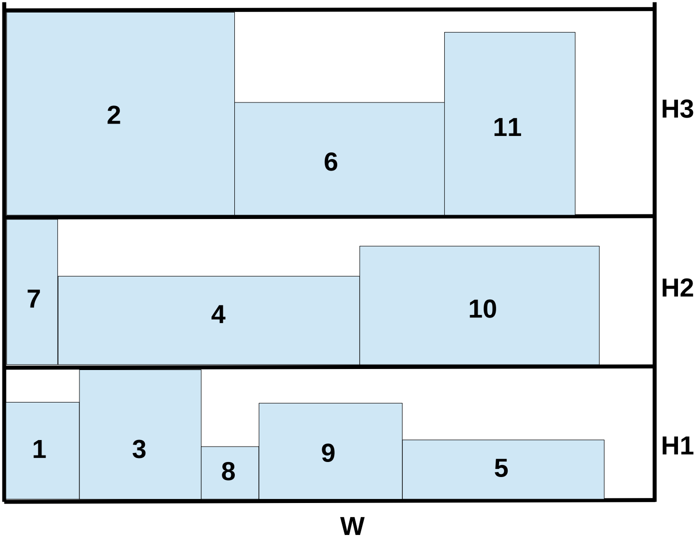
Stoccaggio

Si vogliono disporre alcuni **N** scatoloni (di larghezze e altezze diverse e note) su una scaffalatura composta di **M** ripiani larghi **W**.

- L'altezza di ogni ripiano **non è data** ma deve essere scelta in modo che il ripiano possa contenere (in altezza) tutte le scatole che si vogliono mettere sul ripiano stesso.
- Non è consentito disporre le scatole una sopra l'altra

Si vuole **minimizzare l'altezza complessiva** della scaffalatura

Stoccaggio – esempio



Stoccaggio

Questi sono i dati: $N = 15$, $W = 30$, $M = 5$

Scat.	ℓ	h
1	10	2
2	22	20
3	20	10
4	5	10
5	8	8
6	7	12
7	15	18
8	11	9

Scat.	ℓ	h
9	9	15
10	10	13
11	2	8
12	3	7
13	12	7
14	5	10
15	1	5

Stoccaggio

Variabili di decisione:

$H_j \geq 0$, altezza del ripiano $j = 1, \ldots, M$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è posto sul ripiano } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: $\min \sum_{j=1}^{M} H_j$

Stoccaggio

Variabili di decisione:

$H_j \geq 0$, altezza del ripiano $j = 1, \dots, M$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è posto sul ripiano } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: $\min \sum_{j=1}^{M} H_j$

Stoccaggio

Variabili di decisione:

$H_j \geq 0$, altezza del ripiano $j = 1, \dots, M$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è posto sul ripiano } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: min $\sum_{j=1}^{M} H_j$

Stoccaggio

Vincoli:

- Ogni oggetto su un ripiano

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, N$$

- Altezza di ogni ripiano suff. a contenere gli oggetti

$$H_j \geq h_i x_{ij} \qquad i = 1, \dots, N, \; j = 1, \dots, M$$

- Larghezza dei ripiani pari a W

$$\sum_{i=1}^{N} \ell_i x_{ij} \leq W \qquad j = 1, \dots, M$$

Stoccaggio

Vincoli:

- Ogni oggetto su un ripiano

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Altezza di ogni ripiano suff. a contenere gli oggetti

$$H_j \geq h_i x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, N, \; j = 1, \ldots, M$$

- Larghezza dei ripiani pari a W

$$\sum_{i=1}^{N} \ell_i x_{ij} \leq W \qquad j = 1, \ldots, M$$

Stoccaggio

Vincoli:

- Ogni oggetto su un ripiano

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Altezza di ogni ripiano suff. a contenere gli oggetti

$$H_j \geq h_i x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, N, \; j = 1, \ldots, M$$

- Larghezza dei ripiani pari a W

$$\sum_{i=1}^{N} \ell_i x_{ij} \leq W \qquad j = 1, \ldots, M$$

Stoccaggio

Vincoli:

- Ogni oggetto su un ripiano

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, N$$

- Altezza di ogni ripiano suff. a contenere gli oggetti

$$H_j \geq h_i x_{ij} \qquad i = 1, \dots, N, \; j = 1, \dots, M$$

- Larghezza dei ripiani pari a W

$$\sum_{i=1}^{N} \ell_i x_{ij} \leq W \qquad j = 1, \dots, M$$