Ricerca Operativa

G. Liuzzi[1]

Venerdí 29 Novembre 2019

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

Consideriamo il seguente problema:

$$\min\{c^\top x : \; x \in S \subset \{0,1\}^2\}$$

con $S = \{(0,0),\; (1,0),\; (1,1)\}$.

È evidente che il problema è completamente caratterizzato specificando il vettore dei costi c e l'insieme S delle soluzioni ammissibili, ovvero la coppia (c, S).

Definizione (Formulazione Lineare)

Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b\}$ è una formulazione lineare del problema (c, S) se e solo se

$$S = P \cap \mathbb{Z}^n$$

Introduzione

Consideriamo il seguente problema:

$$\min\{c^\top x : \ x \in S \subset \{0,1\}^2\}$$

con $S = \{(0,0),\ (1,0),\ (1,1)\}$.

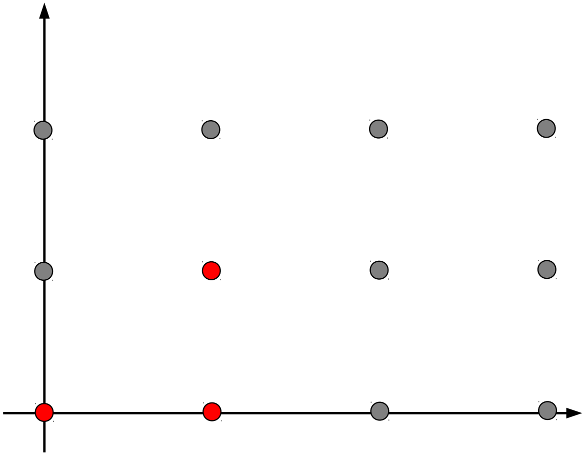
È evidente che il problema è completamente caratterizzato specificando il vettore dei costi c e l'insieme S delle soluzioni ammissibili, ovvero la coppia (c, S).

Definizione (Formulazione Lineare)

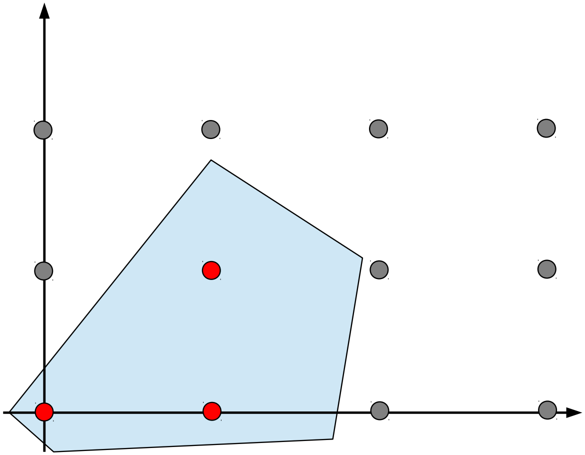
Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$ è una formulazione lineare del problema (c, S) se e solo se

$$S = P \cap \mathbb{Z}^n$$

Formulazione lineare – esempio



Formulazione lineare – esempio



Rilassamento Lineare

Se P è una formulazione di (c, S), possiamo riscrivere il problema (c, S) nel seguente modo:

$$\min\{c^\top x : \ x \in P, \ x \in Z^n\}.$$

Il problema di PL

$$\min\{c^\top x : \ x \in P\}$$

ottenuto eliminando i vincoli di interezza sulla componenti del vettore x, viene detto *rilassamento lineare* di (c, S).

Sia $\hat{x}$ la soluzione ottima del rilassamento lineare di (c, S), vale ovviamente la seguente relazione

$$c^\top \hat{x} \leq \min\{c^\top x : \ x \in S\}.$$

Rilassamento Lineare

Se P è una formulazione di (c, S), possiamo riscrivere il problema (c, S) nel seguente modo:

$$\min\{c^\top x : \; x \in P, \; x \in Z^n\}.$$

Il problema di PL

$$\min\{c^\top x : \; x \in P\}$$

ottenuto eliminando i vincoli di interezza sulla componenti del vettore x, viene detto *rilassamento lineare* di (c, S).

Sia $\hat{x}$ la soluzione ottima del rilassamento lineare di (c, S), vale ovviamente la seguente relazione

$$c^\top \hat{x} \leq \min\{c^\top x : \; x \in S\}.$$

Rilassamento Lineare

Se P è una formulazione di (c, S), possiamo riscrivere il problema (c, S) nel seguente modo:

$$\min\{c^\top x : \ x \in P, \ x \in Z^n\}.$$

Il problema di PL

$$\min\{c^\top x : \ x \in P\}$$

ottenuto eliminando i vincoli di interezza sulla componenti del vettore x, viene detto *rilassamento lineare* di (c, S).

Sia $\hat{x}$ la soluzione ottima del rilassamento lineare di (c, S), vale ovviamente la seguente relazione

$$c^\top \hat{x} \leq \min\{c^\top x : \ x \in S\}.$$

Rilassamento Lineare

Se $\hat{x} \in S$, allora $\hat{x}$ è ottima per (c, S).

Se, invece, $\hat{x} \notin S$ ma esiste una soluzione $\bar{x} \in S$ tale che

$$c^\top \hat{x} = c^\top \bar{x},$$

allora si può concludere che la soluzione $\bar{x}$ è ottima per (c, S)

Rilassamento Lineare

Se $\hat{x} \in S$, allora $\hat{x}$ è ottima per (c, S).

Se, invece, $\hat{x} \notin S$ ma esiste una soluzione $\bar{x} \in S$ tale che

$$c^\top \hat{x} = c^\top \bar{x},$$

allora si può concludere che la soluzione $\bar{x}$ è ottima per (c, S)

Unimodularità

Definizione

Una matrice A $m \times n$ si dice **unimodulare** *se ogni sua sottomatrice quadrata non singolare di dimensione m ha determinante pari a -1 o 1*

Chiedere che A sia unimodulare equivale a chiedere che ogni sottomatrice di base di A abbia determinante pari a -1 o 1.
Vale quindi il seguente

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}$$

abbia tutti vertici interi, per ogni $b \in \mathbb{Z}^m$, è che A sia unimodulare

Totale Unimodularità

Definizione

Una matrice A $m \times n$ si dice **totalmente unimodulare** *se ogni sua sottomatrice quadrata non singolare ha determinante pari a -1 o 1*

Vale quindi il seguente

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0_n\}$$

abbia tutti vertici interi, per ogni $b \in \mathbb{Z}^m$, è che A sia totalmente unimodulare

C.S. di totale unimodularità

Teorema

Sia A una matrice $m \times n$ *con elementi* $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$.
Condizione sufficiente *affincé A sia totalmente unimodulare è che:*

1. *ogni colonna ha al più due elementi diversi da zero*
2. *è possibile partizionare gli indici di riga in due insiemi* Q_1 *e* Q_2 *tali che:*
   (i) *se la colonna j contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ *e* $a_{kj} \neq 0$ *dello stesso segno allora* $i \in Q_1$, $k \in Q_2$
   (ii) *se la colonna j contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ *e* $a_{kj} \neq 0$ *di segno opposto allora* $i, k \in Q_1$ *oppure* $i, j \in Q_2$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È totalmente unimodulare?

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È totalmente unimodulare?

Esempio

Costruite una matrice totalmente unimodulare di dimensione 6×6

C.N. di totale unimodularità

Teorema

Sia A una matrice $m \times n$ con elementi $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ e tale che

1. *ogni colonna ha al più due elementi diversi da zero*

Condizione necessaria *affinché A sia totalmente unimodulare è che*

2. *sia possibile partizionare gli indici di riga in due insiemi Q_1 e Q_2 tali che:*
   (i) *se la colonna j contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{kj} \neq 0$ dello stesso segno allora $i \in Q_1$, $k \in Q_2$*
   (ii) *se la colonna j contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{kj} \neq 0$ di segno opposto allora $i, k \in Q_1$ oppure $i, j \in Q_2$*

Ordinamento delle Formulazioni

Definizione

Date due formulazioni lineari P_1 e P_2 di un problema (c, S), diremo che

$$P_1 \text{ è migliore di } P_2$$

se e solo se $P_1 \subset P_2$.

Quindi possiamo introdurre anche il concetto di formulazione ottima di (c, S).

Definizione (Formulazione ottima)

La formulazione ottima di un problema (c, S) è costituita dal poliedro contenuto in tutti i poliedri contenenti S. Indicheremo tale formulazione con P_S.

Ordinamento delle Formulazioni

Definizione

Date due formulazioni lineari P_1 e P_2 di un problema (c, S), diremo che

$$P_1 \text{ è migliore di } P_2$$

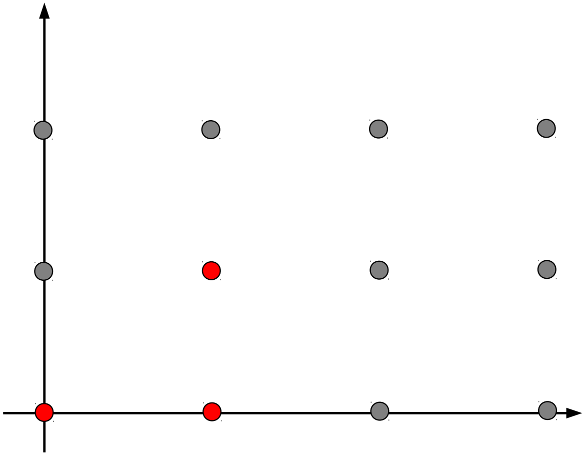
se e solo se $P_1 \subset P_2$.

Quindi possiamo introdurre anche il concetto di formulazione ottima di (c, S).

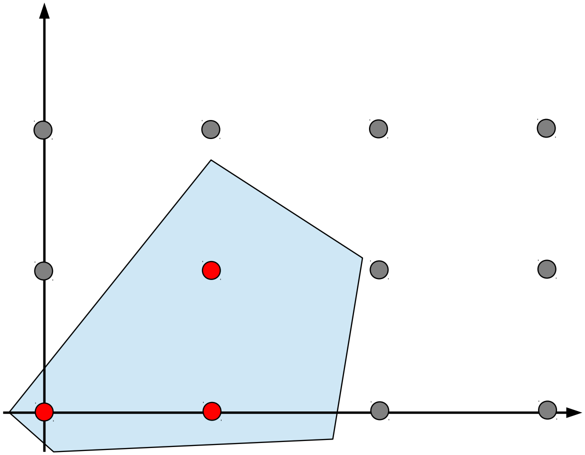
Definizione (Formulazione ottima)

La formulazione ottima di un problema (c, S) è costituita dal poliedro contenuto in tutti i poliedri contenenti S. Indicheremo tale formulazione con P_S.

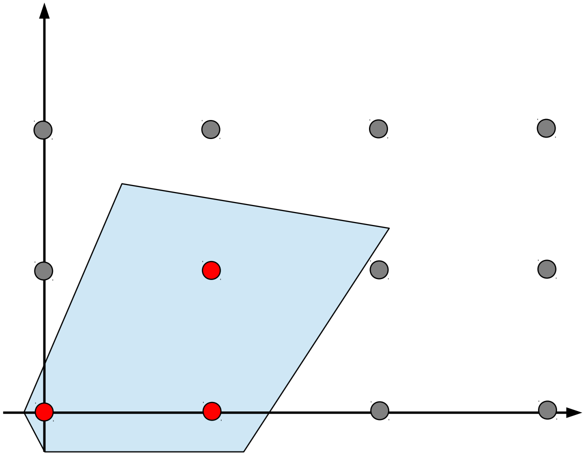
Formulazione ottima – esempio



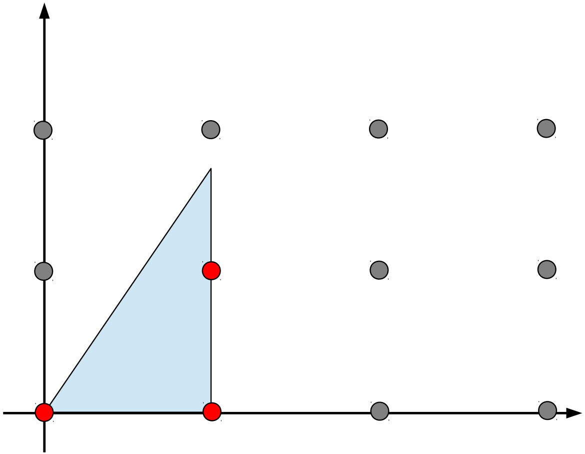
Formulazione ottima – esempio



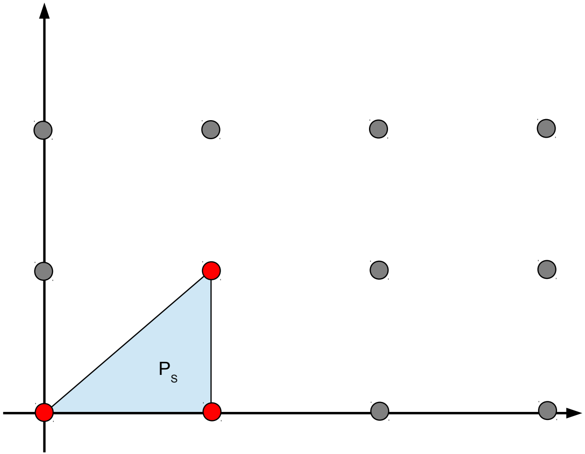
Formulazione ottima – esempio



Formulazione ottima – esempio



Formulazione ottima – esempio



Assunzione

Assunzione

- *S è un insieme finito di elementi (quindi limitato).*
- *Il problema (c, S) ammette una formulazione lineare*

Indichiamo con P_S la formulazione ottima di (c, S). Risulta:

- P_S **è un politopo**
- Tutti i vertici di P_S sono interi

Assunzione

Assunzione

- *S è un insieme finito di elementi (quindi limitato).*
- *Il problema (c, S) ammette una formulazione lineare*

Indichiamo con P_S la formulazione ottima di (c, S). Risulta:

- **P_S è un politopo**
- Tutti i vertici di P_S sono interi

Assunzione

Assunzione

- *S è un insieme finito di elementi (quindi limitato).*
- *Il problema (c, S) ammette una formulazione lineare*

Indichiamo con P_S la formulazione ottima di (c, S). Risulta:

- P_S **è un politopo**
- Tutti i vertici di P_S sono interi

Assunzioni

Dato un problema $\min\{c^\top x : \; x \in S\}$ assumiamo che

- $S = P \cap \mathbb{Z}^n$ dove

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b\}, \quad \text{quindi} \\ S &= \{x \in \mathbb{Z}^n : \; Ax \geq b\} \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^{mn}$

Quindi diciamo che $\min\{c^\top x : \; x \in S\}$ è un problema di PLI perché ammette una formulazione lineare P

Un metodo **ideale** di soluzione

Dato un problema di PLI (c, S)

(1) $\boxed{\text{Ottieni la formulazione ottima } P_S}$

(2) Risolvi il problema rilassato $\min\{c^\top x : x \in P_S\}$ (p.es. usando il metodo del simplesso)

La difficoltà sta proprio nell'individuare la formulazione ottima P_S!!

Un metodo **ideale** di soluzione

Dato un problema di PLI (c, S)

(1) $\boxed{\text{Ottieni la formulazione ottima } P_S}$

(2) Risolvi il problema rilassato $\min\{c^\top x : x \in P_S\}$
(p.es. usando il metodo del simplesso)

La difficoltà sta proprio nell'individuare la formulazione ottima P_S!!

Un metodo **ideale** di soluzione

Dato un problema di PLI (c, S)

(1) $\boxed{\text{Ottieni la formulazione ottima } P_S}$

(2) Risolvi il problema rilassato $\min\{c^\top x : x \in P_S\}$
(p.es. usando il metodo del simplesso)

La difficoltà sta proprio nell'individuare la formulazione ottima P_S!!

Un metodo **ideale** di soluzione

Dato un problema di PLI (c, S)

(1) $\boxed{\text{Ottieni la formulazione ottima } P_S}$

(2) Risolvi il problema rilassato $\min\{c^\top x : x \in P_S\}$
(p.es. usando il metodo del simplesso)

La difficoltà sta proprio nell'individuare la formulazione ottima P_S!!

La Procedura di Gomory

Il primo algoritmo per la soluzione di un problema di PLI generale fu proposto da R.E. Gomory nel 1958

L'algoritmo di Gomory individua la soluzione ottima del problema (c, S) in *un numero finito di passi*

È basato sulla seguente "semplice" idea:

Se una disequazione lineare $a^\top x \geq \alpha$ è tale per cui

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\},$$

con P formulazione lineare di (c, S), allora la disequazione

$$\lceil a \rceil^\top x \geq \lceil \alpha \rceil$$

è soddisfatta da ogni vettore $y \in P \cap \mathbb{Z}^n = S$.

La Procedura di Gomory

Il primo algoritmo per la soluzione di un problema di PLI generale fu proposto da R.E. Gomory nel 1958

L'algoritmo di Gomory individua la soluzione ottima del problema (c, S) in *un numero finito di passi*

È basato sulla seguente "semplice" idea:

Se una disequazione lineare $a^\top x \geq \alpha$ è tale per cui

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\},$$

con P formulazione lineare di (c, S), allora la disequazione

$$\lceil a \rceil^\top x \geq \lceil \alpha \rceil$$

è soddisfatta da ogni vettore $y \in P \cap \mathbb{Z}^n = S$.

La Procedura di Gomory

Il primo algoritmo per la soluzione di un problema di PLI generale fu proposto da R.E. Gomory nel 1958

L'algoritmo di Gomory individua la soluzione ottima del problema (c, S) in *un numero finito di passi*

È basato sulla seguente "semplice" idea:

Se una disequazione lineare $a^\top x \geq \alpha$ è tale per cui

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\},$$

con P formulazione lineare di (c, S), allora la disequazione

$$\lceil a \rceil^\top x \geq \lceil \alpha \rceil$$

è soddisfatta da ogni vettore $y \in P \cap \mathbb{Z}^n = S$.

La Procedura di Gomory

Il primo algoritmo per la soluzione di un problema di PLI generale fu proposto da R.E. Gomory nel 1958

L'algoritmo di Gomory individua la soluzione ottima del problema (c, S) in *un numero finito di passi*

È basato sulla seguente "semplice" idea:

Se una disequazione lineare $a^\top x \geq \alpha$ è tale per cui

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x \geq \alpha\},$$

con P formulazione lineare di (c, S), allora la disequazione

$$\lceil a \rceil^\top x \geq \lceil \alpha \rceil$$

è soddisfatta da ogni vettore $y \in P \cap \mathbb{Z}^n = S$.

Metodo del Piano di Taglio di Gomory

Sia P_i la formulazione corrente.

(a) Risolvi il rilassamento $\min\{c^\top x : \ x \in P_i\}$. Sia x^* la soluzione ottima.

(b) Se x^* non ha tutte componenti intere, allora genera una disequazione $a^\top x \geq \alpha$ (mediante op. di arrotondamento) tale che

- $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \geq \alpha\}$
- $a^\top x^* < \alpha$

(c) Definisci la nuova formulazione P_{i+1} aggiungendo la disequazione $a^\top x \geq \alpha$ alla rapp. esterna di P_i e torna al passo (a).

Gomory dimostrò che è necessario generare solo un *numero finito* di piani di taglio (e quindi una sequenza finita di formulazioni $P_1, P_2, \ldots, P_r$) per produrre una formulazione con soluzione ottima intera.

Metodo del Piano di Taglio di Gomory

Sia P_i la formulazione corrente.

(a) Risolvi il rilassamento $\min\{c^\top x : \; x \in P_i\}$. Sia x^* la soluzione ottima.

(b) Se x^* non ha tutte componenti intere, allora genera una disequazione $a^\top x \geq \alpha$ (mediante op. di arrotondamento) tale che

- $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \geq \alpha\}$
- $a^\top x^* < \alpha$

(c) Definisci la nuova formulazione P_{i+1} aggiungendo la disequazione $a^\top x \geq \alpha$ alla rapp. esterna di P_i e torna al passo (a).

Gomory dimostrò che è necessario generare solo un *numero finito* di piani di taglio (e quindi una sequenza finita di formulazioni $P_1, P_2, \ldots, P_r$) per produrre una formulazione con soluzione ottima intera.

Metodo del Piano di Taglio di Gomory

Sia P_i la formulazione corrente.

(a) Risolvi il rilassamento $\min\{c^\top x : \ x \in P_i\}$. Sia x^* la soluzione ottima.

(b) Se x^* non ha tutte componenti intere, allora genera una disequazione $a^\top x \geq \alpha$ (mediante op. di arrotondamento) tale che

- $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \geq \alpha\}$
- $a^\top x^* < \alpha$

(c) Definisci la nuova formulazione P_{i+1} aggiungendo la disequazione $a^\top x \geq \alpha$ alla rapp. esterna di P_i e torna al passo (a).

Gomory dimostrò che è necessario generare solo un *numero finito* di piani di taglio (e quindi una sequenza finita di formulazioni $P_1, P_2, \ldots, P_r$) per produrre una formulazione con soluzione ottima intera.

Metodo del Piano di Taglio di Gomory

Sia P_i la formulazione corrente.

(a) Risolvi il rilassamento $\min\{c^\top x : \; x \in P_i\}$. Sia x^* la soluzione ottima.

(b) Se x^* non ha tutte componenti intere, allora genera una disequazione $a^\top x \geq \alpha$ (mediante op. di arrotondamento) tale che
- $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \geq \alpha\}$
- $a^\top x^* < \alpha$

(c) Definisci la nuova formulazione P_{i+1} aggiungendo la disequazione $a^\top x \geq \alpha$ alla rapp. esterna di P_i e torna al passo (a).

Gomory dimostrò che è necessario generare solo un *numero finito* di piani di taglio (e quindi una sequenza finita di formulazioni $P_1, P_2, \ldots, P_r$) per produrre una formulazione con soluzione ottima intera.

La Procedura di Chvátal-Gomory

La parte cruciale dell'Algoritmo di Gomory o del *piano di taglio* sta nel saper generare un piano di taglio

Nel 1973 Chvátal propose una procedura finita per la generazione della formulazione ottima P_S

La procedura consiste nella generazione di una sequenza finita $P_1, \dots, P_t$ di formulazioni del problema (c, S) con la proprietà che

$$P_t = P_S$$

Definizione (Taglio di Chvátal-Gomory)

Data una formulazione $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$ del problema (c, S) ed un vettore $u \geq 0_m$, diremo taglio di Chvátal-Gomory prodotto da P, la disequazione

$$\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

La parte cruciale dell'Algoritmo di Gomory o del *piano di taglio* sta nel saper generare un piano di taglio

Nel 1973 Chvátal propose una procedura finita per la generazione della formulazione ottima P_S

La procedura consiste nella generazione di una sequenza finita $P_1, \ldots, P_t$ di formulazioni del problema (c, S) con la proprietà che

$$P_t = P_S$$

Definizione (Taglio di Chvátal-Gomory)

Data una formulazione $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$ del problema (c, S) ed un vettore $u \geq 0_m$, diremo taglio di Chvátal-Gomory prodotto da P, la disequazione

$$\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

La parte cruciale dell'Algoritmo di Gomory o del *piano di taglio* sta nel saper generare un piano di taglio

Nel 1973 Chvátal propose una procedura finita per la generazione della formulazione ottima P_S

La procedura consiste nella generazione di una sequenza finita $P_1, \dots, P_t$ di formulazioni del problema (c, S) con la proprietà che

$$P_t = P_S$$

Definizione (Taglio di Chvátal-Gomory)

Data una formulazione $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$ del problema (c, S) ed un vettore $u \geq 0_m$, diremo taglio di Chvátal-Gomory prodotto da P, la disequazione

$$\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

La parte cruciale dell'Algoritmo di Gomory o del *piano di taglio* sta nel saper generare un piano di taglio

Nel 1973 Chvátal propose una procedura finita per la generazione della formulazione ottima P_S

La procedura consiste nella generazione di una sequenza finita $P_1, \ldots, P_t$ di formulazioni del problema (c, S) con la proprietà che

$$P_t = P_S$$

Definizione (Taglio di Chvátal-Gomory)

Data una formulazione $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$ *del problema* (c, S) *ed un vettore* $u \geq 0_m$, *diremo taglio di Chvátal-Gomory prodotto da* P, *la disequazione*

$$\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

Procedura di Chvátal-Gomory

- Scegli un vettore $u \geq 0_m$ e genera la disequazione $u^\top Ax \geq u^\top b$ (risulta $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; u^\top Ax \geq u^\top b\}$)
- Arrotonda all'intero superiore i coefficienti della disequazione così ottenuta

Teorema

Data una formulazione P del problema (c, S), la disequazione generata dalla procedura di Chvátal-Gomory è tale per cui

$$P_S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil\}$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

Procedura di Chvátal-Gomory

- Scegli un vettore $u \geq 0_m$ e genera la disequazione $u^\top Ax \geq u^\top b$ (risulta $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; u^\top Ax \geq u^\top b\}$)
- Arrotonda all'intero superiore i coefficienti della disequazione così ottenuta

Teorema

Data una formulazione P del problema (c, S), la disequazione generata dalla procedura di Chvátal-Gomory è tale per cui

$$P_S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil\}$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

Procedura di Chvátal-Gomory

- Scegli un vettore $u \geq 0_m$ e genera la disequazione $u^\top Ax \geq u^\top b$ (risulta $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; u^\top Ax \geq u^\top b\}$)
- Arrotonda all'intero superiore i coefficienti della disequazione così ottenuta

Teorema

Data una formulazione P del problema (c, S), la disequazione generata dalla procedura di Chvátal-Gomory è tale per cui

$$P_S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil\}$$

La Procedura di Chvátal-Gomory

Procedura di Chvátal-Gomory

- Scegli un vettore $u \geq 0_m$ e genera la disequazione $u^\top Ax \geq u^\top b$ (risulta $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; u^\top Ax \geq u^\top b\}$)
- Arrotonda all'intero superiore i coefficienti della disequazione così ottenuta

Teorema

Data una formulazione P del problema (c, S), la disequazione generata dalla procedura di Chvátal-Gomory è tale per cui

$$P_S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil\}$$

Chiusura di Chvátal

Nel 1973 V. Chvátal dimostrò che l'insieme

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$$

è un politopo e quindi è necessario aggiungere solo un sottoinsieme finito $Dx \geq d$ delle disequazioni $\{\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$ per otteneme una descrizione esterna

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ Dx \geq d\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \geq b^1\}$$

Il politopo P_1 è noto come **Prima Chiusura** di Chvátal della formulazione P

Risulta, ovviamente, $P_1 \subset P$, quindi P_1 è una formulazione migliore di P

Chiusura di Chvátal

Nel 1973 V. Chvátal dimostrò che l'insieme

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$$

è un politopo e quindi è necessario aggiungere solo un sottoinsieme finito $Dx \geq d$ delle disequazioni $\{\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$ per ottenerne una descrizione esterna

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ Dx \geq d\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \geq b^1\}$$

Il politopo P_1 è noto come **Prima Chiusura** di Chvátal della formulazione P

Risulta, ovviamente, $P_1 \subset P$, quindi P_1 è una formulazione migliore di P

Chiusura di Chvátal

Nel 1973 V. Chvátal dimostrò che l'insieme

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$$

è un politopo e quindi è necessario aggiungere solo un sottoinsieme finito $Dx \geq d$ delle disequazioni $\{\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$ per ottenerne una descrizione esterna

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ Dx \geq d\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \geq b^1\}$$

Il politopo P_1 è noto come **Prima Chiusura** di Chvátal della formulazione P

Risulta, ovviamente, $P_1 \subset P$, quindi P_1 è una formulazione migliore di P

Chiusura di Chvátal

Nel 1973 V. Chvátal dimostrò che l'insieme

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$$

è un politopo e quindi è necessario aggiungere solo un sottoinsieme finito $Dx \geq d$ delle disequazioni $\{\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$ per ottenerne una descrizione esterna

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ Dx \geq d\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \geq b^1\}$$

Il politopo P_1 è noto come **Prima Chiusura** di Chvátal della formulazione P

Risulta, ovviamente, $P_1 \subset P$, quindi P_1 è una formulazione migliore di P

Chiusura di Chvátal

Nel 1973 V. Chvátal dimostrò che l'insieme

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ \lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$$

è un politopo e quindi è necessario aggiungere solo un sottoinsieme finito $Dx \geq d$ delle disequazioni $\{\lceil u^\top A \rceil x \geq \lceil u^\top b \rceil,\ u \in \mathbb{R}^m_+\}$ per ottenerne una descrizione esterna

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ Dx \geq d\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \geq b^1\}$$

Il politopo P_1 è noto come **Prima Chiusura** di Chvátal della formulazione P

Risulta, ovviamente, $P_1 \subset P$, quindi P_1 è una formulazione migliore di P

Chiusura di Chvátal

Poiché la prima chiusura di P è un politopo, P_1, è possibile definire la sua prima chiusura e denotarla con P_2.

P_2 ha la proprietà che

$$S \subset P_2 \subset P_1 \subset P$$

Quindi P_2 è una formulazione di (c, S) migliore di P_1 e P.

La formulazione P_2 è la **Seconda Chiusura** di P.

Definizione

Il politopo $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A^i x \geq b^i\}$, ottenuto da P mediante $i \geq 1$ operazioni di chiusura, viene detto **Chiusura i-esima** *della formulazione P.*

Chiusura di Chvátal

Poiché la prima chiusura di P è un politopo, P_1, è possibile definire la sua prima chiusura e denotarla con P_2.

P_2 ha la proprietà che

$$S \subset P_2 \subset P_1 \subset P$$

Quindi P_2 è una formulazione di (c, S) migliore di P_1 e P.

La formulazione P_2 è la **Seconda Chiusura** di P.

Definizione

Il politopo $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A^i x \geq b^i\}$, ottenuto da P mediante $i \geq 1$ operazioni di chiusura, viene detto **Chiusura i-esima** *della formulazione P.*

Chiusura di Chvátal

Poiché la prima chiusura di P è un politopo, P_1, è possibile definire la sua prima chiusura e denotarla con P_2.

P_2 ha la proprietà che

$$S \subset P_2 \subset P_1 \subset P$$

Quindi P_2 è una formulazione di (c, S) migliore di P_1 e P.

La formulazione P_2 è la **Seconda Chiusura** di P.

Definizione

Il politopo $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; A^i x \geq b^i\}$, ottenuto da P mediante $i \geq 1$ operazioni di chiusura, viene detto **Chiusura i-esima** *della formulazione P.*

Chiusura di Chvátal

Poiché la prima chiusura di P è un politopo, P_1, è possibile definire la sua prima chiusura e denotarla con P_2.

P_2 ha la proprietà che

$$S \subset P_2 \subset P_1 \subset P$$

Quindi P_2 è una formulazione di (c, S) migliore di P_1 e P.

La formulazione P_2 è la **Seconda Chiusura** di P.

Definizione

Il politopo $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; A^i x \geq b^i\}$, ottenuto da P mediante $i \geq 1$ operazioni di chiusura, viene detto **Chiusura i-esima** *della formulazione P.*

Chiusura di Chvátal e formulazione ottima

Teorema

Per ogni problema di PLI (c, S) che ammette formulazione limitata $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b\}$ esiste un intero finito t tale che la formulazione ottima P_S coincide con la chiusura t-esima di P.

Notiamo che il valore dell'intero t per cui si ha $P_t = P_S$ dipende dalla formulazione iniziale.

Sequenza di Gomory

Dato un problema di PLI (c, S) ed una sua formulazione P (politopo), diremo **sequenza di Gomory** *una sequenza di politopi $\{P_0, P_1, \ldots, P_t\}$ con le seguenti proprietà:*

(i) *P_i è una formulazione di (c, S), per $i = 0, \ldots, t$;*

(ii) $P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_t$;

(iii) *$x^*_{i-1} \notin P_i$, dove x^*_{i-1} è la soluzione ottima del problema* $\min\{c^\top x : \; x \in P_{i-1}\}$;

(iv) *x^*_t è una soluzione a componenti intere del problema* $\min\{c^\top x : \; x \in P_t\}$.

Una sequenza di formulazioni $\{P_0, P_1, \ldots, P_t\}$ con le proprietà (i), (ii) e (iii) è detta **sequenza parziale di Gomory**.

Sequenza di Gomory

Dato un problema di PLI (c, S) ed una sua formulazione P (politopo), diremo **sequenza di Gomory** *una sequenza di politopi $\{P_0, P_1, \ldots, P_t\}$ con le seguenti proprietà:*

(i) *P_i è una formulazione di (c, S), per $i = 0, \ldots, t$;*

(ii) *$P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_t$;*

(iii) *$x^*_{i-1} \notin P_i$, dove x^*_{i-1} è la soluzione ottima del problema $\min\{c^\top x : \; x \in P_{i-1}\}$;*

(iv) *x^*_t è una soluzione a componenti intere del problema $\min\{c^\top x : \; x \in P_t\}$.*

Una sequenza di formulazioni $\{P_0, P_1, \ldots, P_t\}$ con le proprietà (i), (ii) e (iii) è detta **sequenza parziale di Gomory**.

Sequenza di Gomory

Dato un problema di PLI (c, S) ed una sua formulazione P (politopo), diremo **sequenza di Gomory** *una sequenza di politopi $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le seguenti proprietà:*

(i) P_i *è una formulazione di* (c, S), *per* $i = 0, \dots, t$;

(ii) $P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_t$;

(iii) $x^*_{i-1} \notin P_i$, *dove* x^*_{i-1} *è la soluzione ottima del problema* $\min\{c^\top x : \ x \in P_{i-1}\}$;

(iv) x^*_t *è una soluzione a componenti intere del problema* $\min\{c^\top x : \ x \in P_t\}$.

Una sequenza di formulazioni $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le proprietà (i), (ii) e (iii) è detta **sequenza parziale di Gomory**.

Sequenza di Gomory

Dato un problema di PLI (c, S) ed una sua formulazione P (politopo), diremo **sequenza di Gomory** *una sequenza di politopi $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le seguenti proprietà:*

(i) *P_i è una formulazione di (c, S), per $i = 0, \dots, t$;*

(ii) *$P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_t$;*

(iii) *$x^*_{i-1} \notin P_i$, dove x^*_{i-1} è la soluzione ottima del problema $\min\{c^\top x : \ x \in P_{i-1}\}$;*

(iv) *x^*_t è una soluzione a componenti intere del problema $\min\{c^\top x : \ x \in P_t\}$.*

Una sequenza di formulazioni $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le proprietà (i), (ii) e (iii) è detta **sequenza parziale di Gomory**.

Sequenza di Gomory

Dato un problema di PLI (c, S) *ed una sua formulazione* P *(politopo), diremo* **sequenza di Gomory** *una sequenza di politopi* $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ *con le seguenti proprietà:*

(i) P_i *è una formulazione di* (c, S), *per* $i = 0, \dots, t$;

(ii) $P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_t$;

(iii) $x^*_{i-1} \notin P_i$, *dove* x^*_{i-1} *è la soluzione ottima del problema* $\min\{c^\top x : \; x \in P_{i-1}\}$;

(iv) x^*_t *è una soluzione a componenti intere del problema* $\min\{c^\top x : \; x \in P_t\}$.

Una sequenza di formulazioni $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le proprietà (i), (ii) e (iii) è detta **sequenza parziale di Gomory**.

Sequenza di Gomory

Dato un problema di PLI (c, S) ed una sua formulazione P (politopo), diremo **sequenza di Gomory** *una sequenza di politopi $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le seguenti proprietà:*

(i) P_i *è una formulazione di* (c, S), *per* $i = 0, \dots, t$;

(ii) $P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_t$;

(iii) $x^*_{i-1} \notin P_i$, *dove* x^*_{i-1} *è la soluzione ottima del problema* $\min\{c^\top x : \ x \in P_{i-1}\}$;

(iv) x^*_t *è una soluzione a componenti intere del problema* $\min\{c^\top x : \ x \in P_t\}$.

Una sequenza di formulazioni $\{P_0, P_1, \dots, P_t\}$ con le proprietà (i), (ii) e (iii) è detta **sequenza parziale di Gomory**.

Sequenza di Gomory

È abbastanza evidente che per costruire una sequenza di Gomory è necessario fornire un meccanismo che sia in grado di:

- generare, a partire da P_i, la formulazione P_{i+1} soddisfacendo (ii) e (iii);
- garantire l'esistenza di un t finito tale che (iv) sia verificata.

Tale maccanismo è usalmente fornito da un **Oracolo di Separazione** ovvero da una procedura che genera, se esiste, un iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x = \alpha\}$ (*iperpiano di separazione*) tale che:

- $a^\top x_i^* < \alpha$;
- $a^\top y \geq \alpha$ per ogni $y \in P_S$.

oppure conclude che un tale iperpiano non esiste.

Sequenza di Gomory

È abbastanza evidente che per costruire una sequenza di Gomory è necessario fornire un meccanismo che sia in grado di:

- generare, a partire da P_i, la formulazione P_{i+1} soddisfacendo (ii) e (iii);
- garantire l'esistenza di un t finito tale che (iv) sia verificata.

Tale maccanismo è usalmente fornito da un **Oracolo di Separazione** ovvero da una procedura che genera, se esiste, un iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x = \alpha\}$ (*iperpiano di separazione*) tale che:

- $a^\top x_i^* < \alpha$;
- $a^\top y \geq \alpha$ per ogni $y \in P_S$.

oppure conclude che un tale iperpiano non esiste.

Sequenza di Gomory

È abbastanza evidente che per costruire una sequenza di Gomory è necessario fornire un meccanismo che sia in grado di:

- generare, a partire da P_i, la formulazione P_{i+1} soddisfacendo (ii) e (iii);
- garantire l'esistenza di un t finito tale che (iv) sia verificata.

Tale maccanismo è usalmente fornito da un **Oracolo di Separazione** ovvero da una procedura che genera, se esiste, un iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x = \alpha\}$ (*iperpiano di separazione*) tale che:

- $a^\top x_i^* < \alpha$;
- $a^\top y \geq \alpha$ per ogni $y \in P_S$.

oppure conclude che un tale iperpiano non esiste.

Sequenza di Gomory

È abbastanza evidente che per costruire una sequenza di Gomory è necessario fornire un meccanismo che sia in grado di:

- generare, a partire da P_i, la formulazione P_{i+1} soddisfacendo (ii) e (iii);
- garantire l'esistenza di un t finito tale che (iv) sia verificata.

Tale maccanismo è usalmente fornito da un **Oracolo di Separazione** ovvero da una procedura che genera, se esiste, un iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x = \alpha\}$ (*iperpiano di separazione*) tale che:

- $a^\top x_i^* < \alpha$;
- $a^\top y \geq \alpha$ per ogni $y \in P_S$.

oppure conclude che un tale iperpiano non esiste.

Sequenza di Gomory

È abbastanza evidente che per costruire una sequenza di Gomory è necessario fornire un meccanismo che sia in grado di:

- generare, a partire da P_i, la formulazione P_{i+1} soddisfacendo (ii) e (iii);
- garantire l'esistenza di un t finito tale che (iv) sia verificata.

Tale maccanismo è usalmente fornito da un **Oracolo di Separazione** ovvero da una procedura che genera, se esiste, un iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x = \alpha\}$ (*iperpiano di separazione*) tale che:

- $a^\top x_i^* < \alpha$;
- $a^\top y \geq \alpha$ per ogni $y \in P_S$.

oppure conclude che un tale iperpiano non esiste.

Taglio di Gomory

- Se esiste un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se non esiste un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se <u>esiste</u> un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se <u>non esiste</u> un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
    - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
    - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
    - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se <u>esiste</u> un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se <u>non esiste</u> un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se <u>esiste</u> un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

  è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se <u>non esiste</u> un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se esiste un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se non esiste un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se esiste un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se non esiste un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se <u>esiste</u> un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se <u>non esiste</u> un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

- Se <u>esiste</u> un iperpiano di separazione H, allora il politopo

$$P_{i+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a^\top x \geq \alpha\} \cap P_i$$

  è una formulazione di (c, S) non contenente x_i^*.

- Se <u>non esiste</u> un iperpiano che separa x_i^* da P_S, allora x_i^* deve appartenera a P_S. Inoltre,
  - poiché x_i^* è un vertice di P_i esso è anche un vertice di P_S
  - e quindi x_i^* è a componenti intere (cioè appartiene ad S).
  - Di conseguenza, $P_i = P_t$ e l'algoritmo termina.

Descriviamo un oracolo di separazione basato sulla **procedura di Chvátal-Gomory**

Taglio di Gomory

Supponiamo di aver generato una *sequenza parziale* di Gomory e di aver risolto il problema (rilassato)

$$\min\{c^\top x : \ x \in P\}$$

relativo ad una formulazione P del problema (c, S).

Sia $\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0_n\}$ una rappresentazione in *Forma Standard* del politopo P.

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $(B^{-1}b)_h \notin \mathbb{Z}$.

Taglio di Gomory

Supponiamo di aver generato una *sequenza parziale* di Gomory e di aver risolto il problema (rilassato)

$$\min\{c^\top x : \; x \in P\}$$

relativo ad una formulazione P del problema (c, S).

Sia $\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0_n\}$ una rappresentazione in *Forma Standard* del politopo P.

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $(B^{-1}b)_h \notin \mathbb{Z}$.

Taglio di Gomory

Supponiamo di aver generato una *sequenza parziale* di Gomory e di aver risolto il problema (rilassato)

$$\min\{c^\top x : \; x \in P\}$$

relativo ad una formulazione P del problema (c, S).

Sia $\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0_n\}$ una rappresentazione in *Forma Standard* del politopo P.

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $(B^{-1}b)_h \notin \mathbb{Z}$.

Taglio di Gomory

Obiettivo: *generare una disequazione che appartenga alla prima chiusura di Chvátal di P e che sia violata da x^*.*

- Poniamo $u^\top = e_h^\top B^{-1}$ e notiamo che $u^\top b = e_h^\top B^{-1} b$ e quindi:

$$\lceil u^\top b \rceil > u^\top b$$

- Consideriamo la disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil$$

Taglio di Gomory

Obiettivo: *generare una disequazione che appartenga alla prima chiusura di Chvátal di P e che sia violata da x^*.*

- Poniamo $u^\top = e_h^\top B^{-1}$ e notiamo che $u^\top b = e_h^\top B^{-1} b$ e quindi:

$$\lceil u^\top b \rceil > u^\top b$$

- Consideriamo la disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil$$

Taglio di Gomory

Obiettivo: *generare una disequazione che appartenga alla prima chiusura di Chvátal di P e che sia violata da x^*.*

- Poniamo $u^\top = e_h^\top B^{-1}$ e notiamo che $u^\top b = e_h^\top B^{-1} b$ e quindi:

$$\lceil u^\top b \rceil > u^\top b$$

- Consideriamo la disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil$$

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \tag{1}$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione.*

La disequazione (1) é detta $\boxed{\text{Taglio frazionario di Gomory}}$

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \qquad (1)$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione.*

La disequazione (1) é detta **Taglio frazionario di Gomory**

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \tag{1}$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione*.

La disequazione (1) é detta $\boxed{\text{Taglio frazionario di Gomory}}$

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \qquad (1)$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione*.

La disequazione (1) é detta $\boxed{\text{Taglio frazionario di Gomory}}$

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \tag{1}$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione*.

La disequazione (1) é detta $\boxed{\text{Taglio frazionario di Gomory}}$

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \qquad (1)$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione*.

La disequazione (1) é detta $\boxed{\text{Taglio frazionario di Gomory}}$

Taglio di Gomory

La disequazione

$$\lceil u^\top B \rceil x_B + \lceil u^\top N \rceil x_N \geq \lceil u^\top b \rceil \qquad (1)$$

è ottenuta applicando la procedura di Chvátal-Gomory al sistema $Bx_B + Nx_N = b$ e quindi é soddisfatta da tutti i punti $x \in P_S$.

Poniamo $x_B = x_B^* = B^{-1}b$ e $x_N = x_N^* = 0_{n-m}$ e sostituiamo

$$\lceil u^\top B \rceil x_B^* = \lceil e_h^\top B^{-1} B \rceil B^{-1} b = e_h^\top B^{-1} b = u^\top b < \lceil u^\top b \rceil$$

Quindi x^* viola la disequazione (1). Abbiamo cioè definito un *oracolo di separazione*.

La disequazione (1) é detta $\boxed{\text{Taglio frazionario di Gomory}}$

Esempio

Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ & x \geq 0_5,\ x \in \mathbb{Z}^5 \end{aligned}$$

La soluzione (AMPL) del rilassamento è
$x^* = (17/3,\ 16/3,\ 0,\ 0,\ 2/3)$. L'ultima forma canonica è

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + 4/15x_3 - 1/15x_4 = 17/3 \\ & x_2 - 1/15x_3 + 4/15x_4 = 16/3 \\ & x_5 - 1/3x_3 + 1/3x_4 = 2/3 \\ & x \geq 0_5 \end{aligned}$$

Esempio

Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ & x \geq 0_5,\ x \in \mathbb{Z}^5 \end{aligned}$$

La soluzione (AMPL) del rilassamento è $x^* = (17/3,\ 16/3,\ 0,\ 0,\ 2/3)$. L'ultima forma canonica è

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + 4/15x_3 - 1/15x_4 = 17/3 \\ & x_2 - 1/15x_3 + 4/15x_4 = 16/3 \\ & x_5 - 1/3x_3 + 1/3x_4 = 2/3 \\ & x \geq 0_5 \end{aligned}$$

Esempio

Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ & x \geq 0_5,\ \ x \in \mathbb{Z}^5 \end{aligned}$$

La soluzione (AMPL) del rilassamento è $x^* = (17/3,\ 16/3,\ 0,\ 0,\ 2/3)$. L'ultima forma canonica è

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + 4/15x_3 - 1/15x_4 = 17/3 \\ & x_2 - 1/15x_3 + 4/15x_4 = 16/3 \\ & x_5 - 1/3x_3 + 1/3x_4 = 2/3 \\ & x \geq 0_5 \end{aligned}$$

Esempio

Tutte le componenti non nulle di x^* sono frazionarie.

- Consideriamo $h = 3$ e quindi x_5^*. Si ottiene in questo caso

$$\begin{aligned} x_5 + \lceil e_3^\top B^{-1} N \rceil (x_3, x_4)^\top &\geq \lceil 2/3 \rceil, \quad \text{ovvero} \\ x_5 + x_4 &\geq 1 \end{aligned}$$

- ovvero, ponendo in forma standard

$$x_4 + x_5 - x_6 = 1$$

Esempio

Tutte le componenti non nulle di x^* sono frazionarie.

- Consideriamo $h = 3$ e quindi x_5^*. Si ottiene in questo caso

$$\begin{array}{rcl} x_5 + \lceil e_3^\top B^{-1} N \rceil (x_3, x_4)^\top & \geq & \lceil 2/3 \rceil, \quad \text{ovvero} \\ x_5 + x_4 & \geq & 1 \end{array}$$

- ovvero, ponendo in forma standard

$$x_4 + x_5 - x_6 = 1$$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è a questo punto, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena generato

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ & x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ & x \geq 0_6 \end{aligned}$$

La soluzione è $x^* = \left(\frac{27}{5},\ \frac{27}{5},\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\right)$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è a questo punto, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena generato

$$\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 5x_2 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\
& x \geq 0_6
\end{aligned}$$

La soluzione è $x^* = \left(\frac{27}{5},\ \frac{27}{5},\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\right)$

Esempio

- consideriamo la variabile x_2
- la seconda riga di B^{-1} vale

$$e_2^T B^{-1} = (0,\ 0.2,\ -0.2,\ 0.2)$$

Quindi il taglio di Gomory che generiamo è:

$$\begin{aligned} x_2 + \lceil e_2^\top B^{-1} N \rceil (x_4, x_6)^\top \quad &\geq \quad \lceil 27/5 \rceil, \quad \text{ovvero} \\ x_2 + x_4 \quad &\geq \quad 6 \end{aligned}$$

ovvero in forma standard

$$x_2 + x_4 - x_7 = 6$$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è ora, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena trovato

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 5x_2 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 + x_4 - x_7 = 6 \\
& x \geq 0_7
\end{aligned}
$$

La soluzione è

$x^* = (5.727273,\ 5.090909,\ 0,\ 0.909091,\ 0.363636,\ 0.272727,\ 0)$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è ora, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena trovato

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 5x_2 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\ & x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ & x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ & x_2 + x_4 - x_7 = 6 \\ & x \geq 0_7 \end{aligned}$$

La soluzione è
$x^* = (5.727273,\ 5.090909,\ 0,\ 0.909091,\ 0.363636,\ 0.272727,\ 0)$

Esempio

- consideriamo la variabile x_6
- la quinta riga di B^{-1} vale

$$e_5^T B^{-1} = (-0.272727,\ 0.090909,\ 1,\ -1,\ 0.90909)$$

Quindi il taglio di Gomory che generiamo è:

$$\begin{array}{rcl} x_6 + \lceil e_5^\top B^{-1} N \rceil (x_3, x_7)^\top & \geq & \lceil 0.272727 \rceil, \quad \text{ovvero} \\ x_6 & \geq & 1 \end{array}$$

ovvero in forma standard

$$x_6 - x_8 = 1$$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è ora, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena trovato

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 5x_2 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 + x_4 - x_7 = 6 \\
& x_6 - x_8 = 1 \\
& x \geq 0_8
\end{aligned}
$$

La soluzione è $x^* = \left(5,\ \frac{16}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 1,\ 0,\ 0\right)$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è ora, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena trovato

$$\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 5x_2 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 + x_4 - x_7 = 6 \\
& x_6 - x_8 = 1 \\
& x \geq 0_8
\end{aligned}$$

La soluzione è $x^* = \left(5,\ \frac{16}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 1,\ 0,\ 0\right)$

Esempio

- consideriamo la variabile x_5
- la quinta riga di B^{-1} vale

$$e_5^T B^{-1} = (0,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{4}{3})$$

Quindi il taglio di Gomory che generiamo è:

$$\begin{aligned} x_5 + \lceil e_5^\top B^{-1} N \rceil (x_7, x_8)^\top &\geq \lceil 4/3 \rceil, \quad \text{ovvero} \\ x_5 + 2x_7 - x_8 &\geq 2 \end{aligned}$$

ovvero in forma standard

$$x_5 + 2x_7 - x_8 - x_9 = 2$$

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è ora, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena trovato

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 5x_2 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 + x_4 - x_7 = 6 \\
& x_6 - x_8 = 1 \\
& x_5 + 2x_7 - x_8 - x_9 = 2 \\
& x \geq 0_9
\end{aligned}
$$

La soluzione è $x^* = (3,\ 6,\ 10,\ 0,\ 4,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0)$!!

La soluzione del problema originale è quindi: $(3,\ 6,\ 10,\ 0,\ 4)$.

Esempio

Il rilassamento "rafforzato" è ora, cioè aggiungendo il taglio di Gomory appena trovato

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - 5x_2 \\
& 4x_1 + x_2 + x_3 = 28 \\
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 27 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\
& x_2 + x_4 - x_7 = 6 \\
& x_6 - x_8 = 1 \\
& x_5 + 2x_7 - x_8 - x_9 = 2 \\
& x \geq 0_9
\end{aligned}
$$

La soluzione è $x^* = (3,\ 6,\ 10,\ 0,\ 4,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0)$!!

La soluzione del problema originale è quindi: $(3,\ 6,\ 10,\ 0,\ 4)$.

Un problema di Capital Budgeting

Un piccolo investitore deve stabilire come investire il proprio capitale potendo scegliere tra **6 differenti investimenti**. L'investitore dispone di un **budget di 100000€** e conosce i **costi di attivazione** nonché il **Net Present Value** (NPV) di ciascuno di essi come riportato nella tabella che segue:

	costo $\times$1000€	NPV
inv.1	100	40
inv.2	50	35
inv.3	45	18
inv.4	20	4
inv.5	10	10
inv.6	5	2

Formulazione matematica

- **Variabili** di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'inv. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- **Funzione obiettivo**:

$$NPV_{tot} = f(x) = 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6.$$

- **Vincoli**:

$$C_{tot} = g(x) = 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 \leq 100$$

Formulazione matematica

Il problema di PL intera (0/1) è

$$\begin{array}{ll} \max & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\ s.t. & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 \leq 100 \\ & x_i \in \{0,1\}^6 \end{array}$$

Formulazione matematica

... oppure

$$
\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\
s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 \leq 100 \\
& x_i \leq 1 \\
& x_i \geq 0 \\
& x_i \in \mathbb{Z}^6
\end{aligned}
$$

il cui rilassamento lineare è ...

Formulazione matematica

$$
\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\
s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 \leq 100 \\
& x_i \leq 1 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

che NON è in forma standard di PL ma che possiamo trasformare equivalentemente in

Rilassamento lineare

$$
\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\
s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 + x_7 = 100 \\
& x_1 + x_8 = 1 \\
& x_2 + x_9 = 1 \\
& x_3 + x_{10} = 1 \\
& x_4 + x_{11} = 1 \\
& x_5 + x_{12} = 1 \\
& x_6 + x_{13} = 1 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

La soluzione ottima del rilassamento è:
$x^* = (0.4, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0.6, 0, 1, 1, 0, 1)$

Generazione del taglio di C-G

- x^* ha due componenti frazionarie
- in base ci sono $x_1, x_2, x_5, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{13}$
- consideriamo $h = 4$ cioè la var. x_8 che vale 0.6
- la quarta riga di B^{-1} vale

$$e_4^\top B^{-1} = (-0.45, -0.2, -0.05, -0.01, 0.5, 0.1)$$

- il taglio frazionario di Chvatal-Gomory è

$$\begin{aligned} x_8 + \lceil e_4^\top B^{-1} \rceil (x_3, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{12})^\top &\geq \lceil 0.6 \rceil \\ x_8 + x_9 + x_{12} &\geq 1.0 \end{aligned}$$

- ovvero in forma standard $x_8 + x_9 + x_{12} - x_{14} = 1.0$

Rilassamento lineare

La formulazione lineare "rafforzata" è

$$
\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\
s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 + x_7 = 100 \\
& x_1 + x_8 = 1 \\
& x_2 + x_9 = 1 \\
& x_3 + x_{10} = 1 \\
& x_4 + x_{11} = 1 \\
& x_5 + x_{12} = 1 \\
& x_6 + x_{13} = 1 \\
& x_8 + x_9 + x_{12} - x_{14} = 1.0 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

La soluzione ottima del rilassamento è:
$x^* = (0, 1, 0.89, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0.11, 1, 0, 1, 0)$

Generazione del taglio di C-G

- x^* ha due componenti frazionarie
- in base ci sono $x_1, x_2, x_3, x_5, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{13}$ (la SBA è degenere)
- consideriamo $h = 6$ cioè la var. x_{10} che vale 0.11
- la sesta riga di B^{-1} vale

$$e_6^\top B^{-1} = (-0.4444, -0.1111, -0.0222, -1.1111, -2, 2.2222)$$

- il taglio frazionario di Chvatal-Gomory è

$$\begin{aligned} x_{10} + \lceil e_6^\top B^{-1} \rceil (x_4, x_6, x_7, x_9, x_{12}, x_{14})^\top &\geq \lceil 0.11 \rceil \\ x_{10} - x_9 - 2x_{12} + 3x_{14} &\geq 1.0 \end{aligned}$$

- ovvero in forma standard $x_{10} - x_9 - 2x_{12} + 3x_{14} - x_{15} = 1.0$

Rilassamento lineare

La formulazione lineare "rafforzata" è

$$
\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\
s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 + x_7 = 100 \\
& x_1 + x_8 = 1 \\
& x_2 + x_9 = 1 \\
& x_3 + x_{10} = 1 \\
& x_4 + x_{11} = 1 \\
& x_5 + x_{12} = 1 \\
& x_6 + x_{13} = 1 \\
& x_8 + x_9 + x_{12} - x_{14} = 1.0 \\
& x_{10} - x_9 - 2x_{12} + 3x_{14} - x_{15} = 1.0 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

La soluzione ottima di questo rilassamento è:
$x^* = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$

Rilassamento lineare

La formulazione lineare "rafforzata" è

$$\begin{aligned}
\max\ & 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6 \\
s.t.\ & 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6 + x_7 = 100 \\
& x_1 + x_8 = 1 \\
& x_2 + x_9 = 1 \\
& x_3 + x_{10} = 1 \\
& x_4 + x_{11} = 1 \\
& x_5 + x_{12} = 1 \\
& x_6 + x_{13} = 1 \\
& x_8 + x_9 + x_{12} - x_{14} = 1.0 \\
& x_{10} - x_9 - 2x_{12} + 3x_{14} - x_{15} = 1.0 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}$$

La soluzione ottima di questo rilassamento è:
$x^* = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$

Job scheduling

Una macchina deve effettuare N lavorazioni non interrompibili $\{1, 2, \ldots, N\}$.

La lavorazione i:

- richiede un **tempo di processamento** p_i
- ha una **due date** d_i (tempo entro cui deve essere completata)

Problema: determinare l'ordine in cui eseguire le lavorazioni in modo da minimizzare la somma delle *tardiness*

$$\text{tardiness}_i = \max\{0, C_i - d_i\}$$

dove C_i è il tempo di completamento della lavorazione i
Quindi $\text{tardiness}_i > 0$ se e solo se $C_i > d_i$ ovvero non è soddisfatta la *due date* d_i

Job scheduling

Variabili di decisione: $S_i \equiv$ tempo di inizio della lavorazione i.
Quindi $C_i = S_i + p_i$

Obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{N} \max\{0, S_i + p_i - d_i\}$

N.B. la funzione obiettivo non è lineare!!

Il problema è equivalente a:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{N} T_i & \\
s.t. & T_i \geq S_i + p_i - d_i & i = 1, \ldots, N \\
 & T_i \geq 0 & i = 1, \ldots, N
\end{array}
$$

Cosa manca ? la macchina **non può** eseguire più di una lavorazione alla volta

Job scheduling

Variabili di decisione: $S_i \equiv$ tempo di inizio della lavorazione i.
Quindi $C_i = S_i + p_i$

Obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{N} \max\{0, S_i + p_i - d_i\}$

N.B. la funzione obiettivo non è lineare!!

Il problema è equivalente a:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{N} T_i & \\
s.t. & T_i \geq S_i + p_i - d_i & i = 1, \ldots, N \\
 & T_i \geq 0 & i = 1, \ldots, N
\end{array}
$$

Cosa manca ? la macchina **non può** eseguire più di una lavorazione alla volta

Job scheduling

Variabili di decisione: $S_i \equiv$ tempo di inizio della lavorazione i.
Quindi $C_i = S_i + p_i$

Obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{N} \max\{0, S_i + p_i - d_i\}$

N.B. la funzione obiettivo non è lineare!!

Il problema è equivalente a:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{N} T_i & \\
s.t. & T_i \geq S_i + p_i - d_i & i = 1, \ldots, N \\
 & T_i \geq 0 & i = 1, \ldots, N
\end{array}
$$

Cosa manca ? la macchina **non può** eseguire più di una lavorazione alla volta

Job scheduling

Variabili di decisione: $S_i \equiv$ tempo di inizio della lavorazione i.
Quindi $C_i = S_i + p_i$

Obiettivo: $\quad \min \sum_{i=1}^{N} \max\{0, S_i + p_i - d_i\}$

N.B. la funzione obiettivo non è lineare!!

Il problema è equivalente a:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{N} T_i & \\ s.t. & T_i \geq S_i + p_i - d_i & i = 1, \ldots, N \\ & T_i \geq 0 & i = 1, \ldots, N \end{array}$$

Cosa manca ? la macchina **non può** eseguire più di una lavorazione alla volta

Job scheduling

Variabili di decisione: $S_i \equiv$ tempo di inizio della lavorazione i.
Quindi $C_i = S_i + p_i$

Obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{N} \max\{0, S_i + p_i - d_i\}$

N.B. la funzione obiettivo non è lineare!!

Il problema è equivalente a:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{N} T_i & \\ s.t. & T_i \geq S_i + p_i - d_i & i = 1, \dots, N \\ & T_i \geq 0 & i = 1, \dots, N \end{array}$$

Cosa manca ? la macchina **non può** eseguire più di una lavorazione alla volta

Job scheduling

In altri termini, per ogni coppia di lavorazioni i e j

$$\textbf{o vale} \quad S_i + p_i \leq S_j \quad \textbf{oppure} \quad S_j + p_j \leq S_i$$

N.B. le due disuguaglianze sono "disgiuntive" cioè nelle soluzioni ammissibili o vale l'una o vale l'altra ma non entrambe.

Per esprimere questo fatto, si possono aggiungere delle variabili binarie

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i è effettuata prima di j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi, bisogna imporre i vincoli:

$$S_i + p_i \leq S_j$$
$$S_j + p_j \leq S_i$$

Job scheduling

In altri termini, per ogni coppia di lavorazioni i e j

$$\textbf{o vale} \quad S_i + p_i \leq S_j \quad \textbf{oppure} \quad S_j + p_j \leq S_i$$

N.B. le due disuguaglianze sono "disgiuntive" cioè nelle soluzioni ammissibili o vale l'una o vale l'altra ma non entrambe.

Per esprimere questo fatto, si possono aggiungere delle variabili binarie

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i è effettuata prima di j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi, bisogna imporre i vincoli:

$$\begin{aligned} S_i + p_i \leq S_j & \qquad \text{se } s_{ij} = 1 \\ S_j + p_j \leq S_i & \qquad \text{se } s_{ji} = 1 \end{aligned}$$

Job scheduling

In altri termini, per ogni coppia di lavorazioni i e j

$$\textbf{o vale} \quad S_i + p_i \leq S_j \quad \textbf{oppure} \quad S_j + p_j \leq S_i$$

N.B. le due disuguaglianze sono "disgiuntive" cioè nelle soluzioni ammissibili o vale l'una o vale l'altra ma non entrambe.

Per esprimere questo fatto, si possono aggiungere delle variabili binarie

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i è effettuata prima di j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi, bisogna imporre i vincoli:

$$\begin{aligned} S_i + p_i \leq S_j \quad &+ \quad M(1 - s_{ij}) \\ S_j + p_j \leq S_i \quad &+ \quad M(1 - s_{ji}) \\ s_{ij} + s_{ji} = 1 \quad & \end{aligned}$$

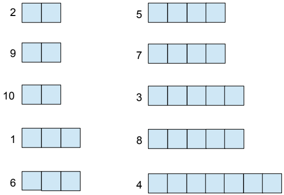
Job scheduling

Quindi il modello completo è:

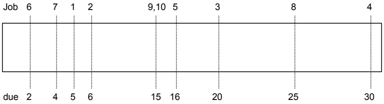
$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{N} T_i & \\
s.t. & T_i \geq S_i + p_i - d_i & i = 1, \dots, N \\
& T_i \geq 0 & i = 1, \dots, N \\
& S_i + p_i \leq S_j + M(1 - s_{ij}) & i, j = 1, \dots, N, \;\; i \neq j \\
& S_j + p_j \leq S_i + M(1 - s_{ji}) & i, j = 1, \dots, N, \;\; i \neq j \\
& s_{ij} + s_{ji} = 1 & i, j = 1, \dots, N, \;\; i \neq j
\end{array}
$$

Job scheduling

$N = 10$ lavorazioni con processing times



e due times



Job scheduling

Implementazione e soluzione:

- AMPL/CPLEX
- Julia, JuMP e CPLEX
- Julia e CPLEX