Ricerca Operativa

G. Liuzzi[1]

Mercoledí 25 Settembre 2019

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Notizie utili

Giampaolo Liuzzi

- IASI (CNR), Via dei Taurini 19 (00185, Roma), V piano, stanza 514 (**poco utile**)
- Tel: 06 49937129 (**poco utile**)
- email: `giampaolo.liuzzi@iasi.cnr.it` (**utile**)
- didattica: (**utilissimo**)
  `http://www.iasi.cnr.it/~liuzzi/teachita.htm`
  `https://groups.google.com/forum/#!forum/ro_sapienza_2019-2020`

Notizie utili (che corso è questo?)

Ricerca Operativa

- per Ingegneria **Informatica e Automatica**
- **Mercoledí** 15:00-18:00 (c'è la pausa), **Venerdí** 13:00 15:00
- Ricevimento: **Mercoledì** 11:00-12:00 presso **IASI**
- Materiale didattico:
  - trasparenze delle lezioni
  - dispense del Prof. M. Roma
    `http://www.dis.uniroma1.it/∼roma/didattica/...`
    `...RO18-19/materiale.htm`
  - libro "Fondamenti di Ricerca Operativa" di Prof. Fabio Schoen
- Modalità d'esame:
  - `http://www.dis.uniroma1.it/∼roma/didattica/...`
    `...RO18-19/esami.htm`

Il nome

Che vuol dire "Ricerca Operativa"?

Il nome

Che vuol dire "Ricerca Operativa"?

- Ricerca Operativa è la traduzione letterale dell'inglese
  - (britannico) "operational research" o
  - (americano) "operations research",
- ovvero "ricerca sulle operazioni"

Il nome

Che vuol dire "Ricerca Operativa"?

- Ricerca Operativa è la traduzione letterale dell'inglese
  - (britannico) "operational research" o
  - (americano) "operations research",
- ovvero "ricerca sulle operazioni"
- entrambi sono spesso abbreviati con la sigla **OR**

Il nome

Che vuol dire "Ricerca Operativa"?

- Ricerca Operativa è la traduzione letterale dell'inglese
  - (britannico) "operational research" o
  - (americano) "operations research",
- ovvero "ricerca sulle operazioni"
- entrambi sono spesso abbreviati con la sigla **OR**
- altri nomi speso utilizzati sono
  - "Management Science" (MS) e (molto meno freq.)
  - "Decision Analysis" (DA) o "Decision Science" (DS)

Cosa è?

Ricerca operativa =

Cosa è?

Ricerca operativa =

- **matematica** operativa

Cosa è?

Ricerca operativa =

- **matematica** operativa
- matematica **utile**

Cosa fà?

Un po' di esempi

- Uno alla portata di **tutti** (*Il problema del bagaglio a mano*)
- Uno alla portata di **molti** (*Il problema del percorso minimo*)
- Uno alla portata di **pochi** (*Il problema di "Montalbano"*)

Cosa fà?

Un po' di esempi

- Uno alla portata di **tutti** (*Il problema del bagaglio a mano*)
- Uno alla portata di **molti** (*Il problema del percorso minimo*)
- Uno alla portata di **pochi** (*Il problema di "Montalbano"*)

- Un problema di assegnamento
- Un problema di Capital Budgeting

Il problema del bagaglio a mano

dal sito di ALITALIA:

Puoi portare in cabina un solo bagaglio a mano del **peso massimo di 8 kg** *che, comprese maniglie, tasche laterali e rotelle, non superi le seguenti dimensioni:*

- **55 cm** *ALTEZZA*
- **35 cm** *LARGHEZZA*
- **25 cm** *SPESSORE*

Il problema del bagaglio a mano

dal sito di ALITALIA:

Puoi portare in cabina un solo bagaglio a mano del **peso massimo di 8 kg** *che, comprese maniglie, tasche laterali e rotelle, non superi le seguenti dimensioni:*

- **55 cm** *ALTEZZA*
- **35 cm** *LARGHEZZA*
- **25 cm** *SPESSORE*

Obiettivo: Massimizzare l'utilità complessiva degli oggetti nel bagaglio rispettando le regole di Alitalia

Il problema del percorso minimo

Dati:

- una rete stradale
- tempi di percorrenza sui tratti stradali della rete
- una località di partenza
- una destinazione

determinare il percorso "minimo" che collega la partenza con la destinazione.

Il problema del percorso minimo

Dati:

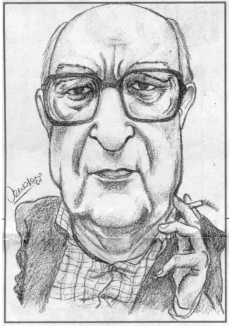
- una rete stradale
- tempi di percorrenza sui tratti stradali della rete
- una località di partenza
- una destinazione

determinare il percorso "minimo" che collega la partenza con la destinazione.

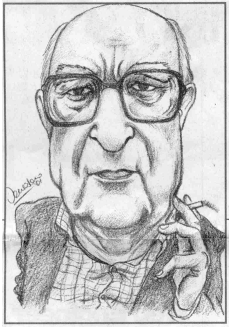
Problema usualmente risolto mediante uso di (ad esempio):

- Google Maps
- Waze
- findthebestroute.com
- TomTom
- ...

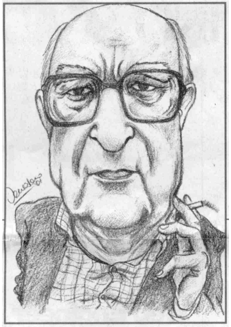
Il problema di "Montalbano"



Il problema di "Montalbano"

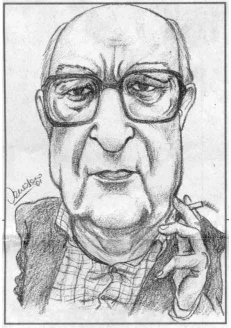


Il problema di "Montalbano"



Andrea Camilleri (1925 - 2019, 17 Luglio)

Il problema di “Montalbano”



Andrea Camilleri (1925 - 2019, 17 Luglio)

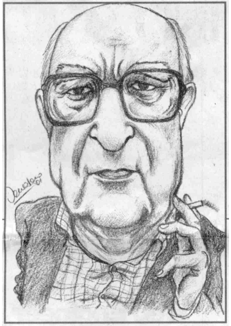
- Raccolta “La prima indagine di Montalbano” (2004)

  Sette Lunedì

  La prima indagine di Montalbano

  Ritorno alle origini

Il problema di “Montalbano”



Andrea Camilleri (1925 - 2019, 17 Luglio)

- Raccolta “La prima indagine di Montalbano” (2004)

  Sette Lunedì
  La prima indagine di Montalbano
  Ritorno alle origini

Sette Lunedì

Tutto comincia un Lunedì (22 Settembre), giorno nel quale viene rinvenuto un cefalo "morto" per un colpo di pistola.

La storia continua con altri ritrovamenti di animali "uccisi" per mano evidentemente di uno squilibrato nei Lunedì a seguire

In particolare, il commissario Montalbano sospetta che il settimo Lunedì il pazzo possa uccidere una donna o un uomo il cui cognome comincia con la lettera "**O**"

Il problema di "Montalbano"

[...] "Adesso facciamo così. Tu, Mimí, vai all'ufficio anagrafe e ti fai dare l'elenco di tutti quelli il cui cognome principia con la vocale O. Non saranno centomila." [...]

[...] Mimí Augello gli sbattí sulla scrivania, con un'ariata sdignosa, una decina di fogli scritti fitti fitti.
"Questo è l'elenco di tutti quelli il cui cognome principia per O. Per tua conoscenza, si tratta di quattrocentodue persone, tra mescoli, fimmine, picciotti, picciotteddre, vecchi, picciliddri e neonati." [...]

[...] "Quindi ora voi sapete dove abitano. Mimí, ti devi mettere a un'opera fina, ma **camurriosa**. Fai un segno di croce, sullo stradario di Vigata, per indicare dove stanno di casa questi che hanno il cognome che principia con la O. Quindi traccia **un percorso ideale, il piu' breve**, perché al momento opportuno noi possiamo avvertire tutti nel minor tempo possibile."

Il problema di "Montalbano"

Problema del Commesso Viaggiatore o problema del ciclo Hamiltoniano di lunghezza minima

- Dato un insieme di città, determinare il percorso di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.
- È uno dei problemi **più difficili** della RO.

Storicamente ...

- Concorso indetto da Procter & Gamble nel 1962
- Determinare il tour di lunghezza minima passante per 33 città USA

Storicamente ...

Storicamente ...

- Vincitore: Gerald Thompson (Carnegie Mellon University)

Storicamente ...

Applicazione al VLSI

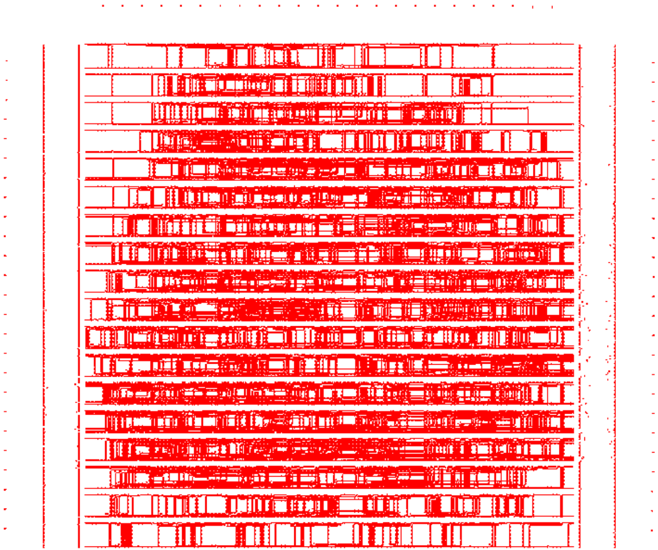
Nel 1986 alcuni ricercatori dei **Bell Labs** svilupparono una tecnica per la produzione di computer chips (LaserLogic)

"A LaserLogic chip starts with many simple logic gates that are connected to each other. A laser then scissors this network of gates into many individual circuits by vaporizing (or shooting) thousands of special interconnections called laser links. The final configuration of the circuit is determined by which links are shot."

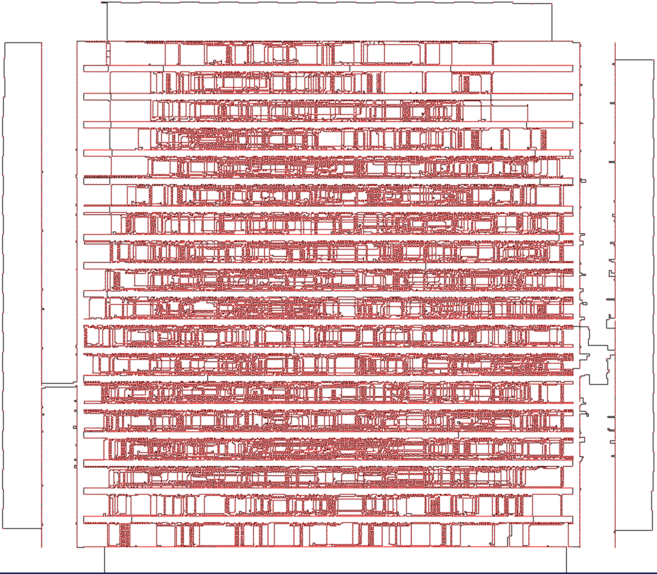
Le "città" sono le posizioni delle interconnessioni da vaporizzare.

Problema: minimizzare il tempo totale di spostamento del laser.

Storicamente ...



Storicamente ...



Storicamente ...

Siti web "interessanti"

- http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem
- http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/
- http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/

Il problema di assegnamento

Un problema **semplicissimo** da descrivere ma **difficilissimo** da risolvere

Dati:

- N lavoratori ed N lavori da svolgere
- l'utilità u_{ij} derivante dall'aver assegnato il lavoratore i al lavoro j
- decidere come assegnare lavoratori ai lavori in modo che risulti massima l'utilità complessiva

Il problema di assegnamento

È stato formulato (per la prima volta) negli anni 50 da uno **psicologo**!!!, R.L. Thorndike, Presidente della Division on Evaluation and Measurement, American Psychological Association.

Vediamo in che termini:

Il problema di assegnamento

È stato formulato (per la prima volta) negli anni 50 da uno **psicologo**!!!, R.L. Thorndike, Presidente della Division on Evaluation and Measurement, American Psychological Association.

Vediamo in che termini:

"**Given**: A set of job categories with N vacancies to be filled, and N individuals to be used in filling them.

Required: To assign the individuals to the jobs in such a way that the average success of all the individuals in all the jobs to which they are assigned will be a maximum."

("The problem of classification of personnel", Psychometrica, 1950).

Il problema di assegnamento

Q: In quanti modi è possibile assegnare i lavoratori ai lavori ?

Il problema di assegnamento

Q: In quanti modi è possibile assegnare i lavoratori ai lavori ?

A: $N(N-1)(N-2)\cdots 2 = N!$

cioè pari al numero di permutazioni di N elementi.

Quindi abbiamo un numero **finito** (anche se grande) di soluzioni !

Per $N = 70$, $N! \simeq 1.2 \times 10^{100}$

Il problema di assegnamento

"There are, as has been indicated, a finite number of permutations in the assignment of men to jobs. When the classification problem as formulated above was **presented to a non-OR-expert**, he pointed to this fact and said that from the point of view of the mathematician **there was no problem**. Since the number of permutations was finite, one had only to try them all and choose the best. He dismissed the problem at that point."

Il problema di assegnamento

Sempre nel caso $N = 70$,

- supponiamo di disporre di un elaboratore in grado di eseguire 10^9 assegnamenti al secondo
- supponiamo di far lavorare l'elaboratore per ... 15 miliardi di anni ($\sim$ età dell'universo noto!)

Il problema di assegnamento

Sempre nel caso $N = 70$,

- supponiamo di disporre di un elaboratore in grado di eseguire 10^9 assegnamenti al secondo
- supponiamo di far lavorare l'elaboratore per ... 15 miliardi di anni ($\sim$ età dell'universo noto!)
- gli assegnamenti testati sarebbero (solo) $\sim 4.7 \times 10^{26} \ll N!$

Il problema di assegnamento

“There are, as has been indicated, a finite number of permutations in the assignment of men to jobs. When the classification problem as formulated above was **presented to a non-OR-expert**, he pointed to this fact and said that from the point of view of the mathematician **there was no problem**. Since the number of permutations was finite, one had only to try them all and choose the best. He dismissed the problem at that point.
This is rather cold comfort to the psychologist, however, when one considers that only ten men and ten jobs mean over three and a half million permutations. Trying out all the permutations may be a mathematical solution to the problem, it is NOT an **operational** solution.”

Un problema di Capital Budgeting

Un piccolo investitore deve stabilire come investire il proprio capitale potendo scegliere tra **6 differenti investimenti**. L'investitore dispone di un **budget di 100000€** e conosce i **costi di attivazione** nonché il **Net Present Value** (NPV) di ciascuno di essi come riportato nella tabella che segue:

	costo $\times$1000€	NPV
inv.1	100	40
inv.2	50	35
inv.3	45	18
inv.4	20	4
inv.5	10	10
inv.6	5	2

Formalizzazione matematica

$\mathcal{P}$ insieme delle scelte possibili

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Per ogni $i \in \mathcal{P}$, siano w_i e p_i rispettivamente il costo ed il NPV associati ad i. Sia $C = 100000$ il budget disponibile.

Formalizzazione matematica

$\mathcal{P}$ insieme delle scelte possibili

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Per ogni $i \in \mathcal{P}$, siano w_i e p_i rispettivamente il costo ed il NPV associati ad i. Sia $C = 100000$ il budget disponibile.

Dato che un investimento può solo essere attivato per intero o non essere attivato, introduciamo, per ogni $i \in \mathcal{P}$, le variabili:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'inv. } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Percui una selezione di investimenti è rappresentata da un vettore $x \in \{0, 1\}^6$ o **vettore di incidenza**.

N.B. Non tutte le possibili selezioni di investimenti sono ammissibili.

Formalizzazione matematica

Ad esempio:

- il vettore $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ rapp. una scelta ammissibile;
- il vettore $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ rapp. una scelta NON ammissibile;

In totale ci sono $2^6 = 64$ possibili scelte (di cui solo 48 ammissibili)!

- il vettore $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ dà un NPV pari a 40;
- il vettore $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$ dà un NPV pari a 16;

Problema: Tra tutte le scelte ammissibili determinare quella che dà il NPV totale maggiore.

Formalizzazione matematica

Ancora non vogliamo risolvere il problema.

Vogliamo rappresentarlo in **forma compatta** (mediante relazioni matematiche)

- quali sono le scelte ammissibili;
- quale è il NPV totale di una generica scelta di investimenti.

Come fareste ?

NPV totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il NPV totale associato ad x ?

NPV totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il NPV totale associato ad x ?

$$NPV_{tot} = f(x) =$$

NPV totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il NPV totale associato ad x ?

$$NPV_{tot} = f(x) = 40x_1 +$$

NPV totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il NPV totale associato ad x ?

$$NPV_{tot} = f(x) = 40x_1 + 35x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 2x_6.$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i$$

Costo totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il Costo totale associato ad x ?

Costo totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il Costo totale associato ad x ?

$$C_{tot} = g(x) =$$

Costo totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il Costo totale associato ad x ?

$$C_{tot} = g(x) = 100x_1 +$$

Costo totale

Esiste una funzione che, dato un vettore di incidenza x di un piano di investimenti, fornisce il Costo totale associato ad x ?

$$C_{tot} = g(x) = 100x_1 + 50x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 5x_6.$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{6} w_i x_i \leq C = 100$$

Problema di Programmazione Matematica

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{6} p_i x_i$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{6} w_i x_i \leq C$$
$$x \in \{0,1\}^6.$$

Tutte le variabili x_i possono assumere solo valore 0 o 1 quindi si parla di

Programmazione 0/1 o **Programmazione binaria**

Pianificazione ottima della produzione

Un colorificio produce 2 tipi di coloranti **C1** e **C2** utilizzando 3 preparati base **P1**, **P2** e **P3**.
La tabella riporta: (a) le quantità (in etti) di preparati base necessari per produrre un litro di ciascun tipo di colorante; (b) le disponibilità massime (in etti/mese) di preparati base; (c) il prezzo di vendita (in eur/litro) dei due coloranti.

hg/ℓ	C1	C2	q.max (hg)
P1	1	1	750
P2	1	2	1000
P3	–	1	400
prezzo €/ℓ	7	10	

Determinare la strategia ottima di produzione mensile.

Formulazione matematica del problema

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in litri/mese di **C1** prodotto;

x_2: indica la quantità in litri/mese di **C2** prodotto;

Formulazione matematica del problema

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in litri/mese di **C1** prodotto;

x_2: indica la quantità in litri/mese di **C2** prodotto;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\max\ 7x_1 + 10x_2 \quad (\text{€}/mese)$$

Formulazione matematica del problema

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in litri/mese di **C1** prodotto;

x_2: indica la quantità in litri/mese di **C2** prodotto;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\max \; 7x_1 + 10x_2 \quad (\text{€}/mese)$$

Passo 3: Vincoli

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 \leq 750 & \text{disp. di P1} \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 & \text{disp. di P2} \\ x_2 \leq 400 & \text{disp. di P3} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \text{non negatività} \end{array}$$

Un problema di miscelazione

- Un'industria conserviera produce succhi di frutta (SF) mescolando polpa di frutta (P) e dolcificante (D).
- Il prodotto finale deve soddisfare alcuni requisiti sul contenuto di Vitamina C (V), Sali minerali (S) e Zucchero (Z).

	costo [€$_{cent}$/hg]	V [mg/hg]	S [mg/hg]	Z [g/hg]
P	40	140	20	25
D	60	–	10	50
SF		$\geq$ 70 mg	$\geq$ 30,g	$\geq$ 75 g

Problema: Determinare le quantità ottime di P e D da miscelare.

Formulazione matematica

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in hg di **P**;

x_2: indica la quantità in hg di **D**;

Formulazione matematica

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in hg di **P**;

x_2: indica la quantità in hg di **D**;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\min \; 40x_1 + 60x_2 \quad (€_{cent})$$

Formulazione matematica

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in hg di **P**;

x_2: indica la quantità in hg di **D**;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\min\ 40x_1 + 60x_2 \quad (€_{cent})$$

Passo 3: Vincoli

$$140x_1 \geq 70 \qquad \text{req. su V}$$

Formulazione matematica

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in hg di **P**;

x_2: indica la quantità in hg di **D**;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\min\ 40x_1 + 60x_2 \quad (€_{cent})$$

Passo 3: Vincoli

$$\begin{array}{ll} 140x_1 \geq 70 & \text{req. su V} \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 & \text{req. su S} \end{array}$$

Formulazione matematica

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in hg di **P**;

x_2: indica la quantità in hg di **D**;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\min\ 40x_1 + 60x_2 \quad (€_{cent})$$

Passo 3: Vincoli

$$\begin{array}{ll} 140x_1 \geq 70 & \text{req. su V} \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 & \text{req. su S} \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 & \text{req. su Z} \end{array}$$

Formulazione matematica

Passo 1: Scelta delle variabili di decisione

x_1: indica la quantità in hg di **P**;

x_2: indica la quantità in hg di **D**;

Passo 2: Funzione obiettivo

$$\min\ 40x_1 + 60x_2 \quad (€_{cent})$$

Passo 3: Vincoli

$$\begin{array}{ll} 140x_1 \geq 70 & \text{req. su V} \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 & \text{req. su S} \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 & \text{req. su Z} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \text{non negatività} \end{array}$$