11/01/2011 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{10s + 3}{s(s^2 + s + 1)}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in \mathbb{R}$ utilizzando il criterio di Nyquist.

Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo continuo**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietá dei modi naturali;
ii) calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera del sistema è: $y_{\text{lib}}(t) = e^t \sin(t)$;
iii) calcolare la funzione di trasferimento e la risposta del sistema al gradino unitario.

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2^2(t)\big(x_1(t) + 1\big) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2^3(t) - 1 \end{cases}$$

Calcolare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

Esercizio 4. Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \qquad x_2 = [0\ 1\ 0\ 0]^T \qquad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \qquad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \qquad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 3), 4-i)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 1.5 ORE – LIBRI CHIUSI.

27/01/2011 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{(s-5)(s^2+1)}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in I\!R$ utilizzando il criterio di Nyquist.

Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo discreto**:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietá dei modi naturali;
ii) calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera del sistema corrisponde a un gradino unitario;
iii) calcolare la funzione di trasferimento e la risposta del sistema al'ingresso: $u(t) = 2^t$.

Esercizio 3. Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)^2} \\ \\ \dfrac{s}{s-2} \end{bmatrix}.$$

Calcolare una rappresentazione con lo spazio di stato *minima* utilizzando entrambe le forme compagne (raggiungibile/osservabile).

Esercizio 4. Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \quad x_2 = [0\ 1\ 0\ 0]^T \quad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \quad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \quad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 4-i)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 1.5 ORE – LIBRI CHIUSI.

10/02/2011 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{s(s^2 - 3s + 2)}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in \mathbb{R}$ utilizzando il criterio di Nyquist.

Facoltativo: verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo continuo**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietá dei modi naturali;
ii) calcolare la funzione di trasferimento e la risposta del sistema al gradino unitario;
iii) calcolare l'evoluzione dell'uscita del sistema, eccitato dall'ingresso $u(t) = \sin(3t)$, e a partire dallo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema lineare stazionario tempo-discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0, \\ \quad y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Calcolare una trasformazione di coordinate che decomponga la matrice A a blocchi di Jordan;
ii) calcolare la potenza di matrice A^t;
iii) calcolare per quali valori dello stato iniziale x_0, l'evoluzione libera dell'uscita è pari a $y_l(t) = (-1)^t$.

Esercizio 4. Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \quad x_2 = [0\ 1\ 0\ 0]^T \quad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \quad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \quad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 4-i)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 1.5 ORE – LIBRI CHIUSI.

17/06/2011 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{(s^2+4)(s-1)^2}$$

Si ponga il sistema in controreazione unitaria, con un guadagno variabile K in catena aperta. Si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e si calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di $K \in \mathbb{R}$ utilizzando il criterio di Nyquist.

Facoltativo: dopo aver calcolato il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso, verificare il risultato utilizzando il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo continuo**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietá dei modi naturali;
ii) calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera del sistema è: $y_{\text{lib}}(t) = e^{-2t}$;
iii) calcolare la funzione di trasferimento e l'evoluzione dell'uscita del sistema, per l'ingresso $u(t) = -2\cos(3t)$

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2(x_1-3)(x_2-1) \\ \dot{x}_2 = -x_2 - (x_1-3)^2 \end{cases}$$

Calcolare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

Esercizio 4. Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Discutere le proprietà strutturali del sistema; in particolar modo si dica (motivando la risposta) se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \quad x_2 = [0\ 0\ 1\ 1]^T \quad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \quad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \quad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

ii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iii) si determini un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
iv) si determini un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 3), 4-i)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2)**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4)**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 1.5 ORE – LIBRI CHIUSI.

15/07/2011 – COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

Esercizio 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta, in cui K è un guadagno variabile:

$$W(s) = \frac{K}{s(s+4)(s-20)}$$

i) Si disegnino i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $W(s)$ per $K = 1$;
ii) si disegni il diagramma polare della funzione di trasferimento $W(s)$ per $K = 1$;
iii) si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
iv) si calcoli il numero di poli a parte reale positiva del sistema a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il criterio di Nyquist e, facoltativamente, verificare il risultato mediante il criterio di Routh.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a **tempo discreto**:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Discutere le proprietà dei modi naturali;
ii) calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera del sistema è: $y_{\text{lib}}(t) = 3 \cdot 2^{-t}$;
iii) calcolare la funzione di trasferimento e l'evoluzione dell'uscita del sistema, per l'ingresso $u(t) = 2^t$

Esercizio 3. Sia dato il seguente sistema lineare stazionario tempo-continuo:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Calcolare una trasformazione di coordinate che decomponga la matrice A a blocchi di Jordan;
ii) calcolare l'esponenziale di matrice A^t;
iii) calcolare per quali valori dello stato iniziale x_0, l'evoluzione libera dell'uscita è pari a $y_l(t) = te^{-t}$.

Esercizio 4. Sia dato il seguente sistema lineare a tempo continuo stazionario rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Determinare una base per lo spazio degli stati raggiungibili ed una base per lo spazio degli stati inosservabili;
ii) stabilire se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili e/o osservabili:

$$x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^T, \quad x_2 = [0\ 0\ 1\ 1]^T \quad x_3 = [0\ 0\ 1\ 0]^T, \quad x_4 = [0\ 0\ 0\ 1]^T, \quad x_5 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$$

iii) determinare un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati raggiungibili e non raggiungibili;
iv) determinare un cambio di coordinate che decomponga lo spazio di stato nello spazio degli stati osservabili e inosservabili;
v) determinare un cambiamento di coordinate che decomponga il sistema in forma canonica di Kalman, se ne individui la rappresentazione in forma minima e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

NB:

- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi (9 CFU)" svolgano i punti 1), 2), 4-i), 4-ii);**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi I (6 CFU)" svolgano i punti 1), 2);**
- **Gli studenti di "Teoria dei Sistemi II (6 CFU)" svolgano i punti 3), 4).**

TEMPO A DISPOSIZIONE (PER TUTTI): 2 ORE – LIBRI CHIUSI.