Algoritmi, reti e giochi

Vincenzo Bonifaci

1 Introduzione

Internet e il World Wide Web possono essere visti come sistemi la cui evoluzione è guidata da una moltitudine di agenti indipendenti (*service providers*, sistemi autonomi, utenti finali), che agiscono secondo principi economici. Per questo, particolarmente negli ultimi anni, le scienze informatiche hanno tratto ispirazione dalla teoria economica dei giochi e, più in generale, dalle teorie economiche, al fine di comprendere i meccanismi che motivano gli agenti della rete. Inoltre, la diffusione sempre maggiore e pervasiva di Internet ha determinato lo spostamento di diverse attività economiche e commerciali sulla rete e ne ha create di nuove, come il commercio elettronico e le aste on-line computerizzate; si pensi a operatori quali eBay o Amazon.

In questo contesto, la capacità di comprendere al meglio il comportamento degli agenti è cruciale per migliorare l'efficienza globale del sistema. Poiché i compiti in una rete sono di norma svolti in maniera decentralizzata, diviene necessario affidarsi alle scelte individuali degli agenti, che però sono principalmente guidati dai propri interessi economici e che quindi non hanno necessariamente a cuore l'efficienza complessiva del sistema. L'informatica e, più in particolare, l'algoritmica hanno negli ultimi anni iniziato a contribuire a questa tematica.

Vincenzo Bonifaci
Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica "Antonio Ruberti", Consiglio Nazionale delle Ricerche, viale Manzoni 30, 00185 Roma, Italy.

2 Giochi e concetti di soluzione

2.1 Il dilemma del prigioniero

Per comprendere meglio l'approccio della teoria dei giochi all'analisi delle situazioni di conflitto, consideriamo il seguente famoso scenario proposto nel 1950 dai matematici americani Merrill Flood, Melvin Drescher e Albert W. Tucker. Due criminali, R. e C., sono stati catturati dalla polizia e devono essere incriminati per un grave reato. Non avendo sufficienti prove a disposizione per l'incriminazione, il pubblico ministero tenta di convincere separatamente ciascuno dei due criminali a confessare. I prigionieri si trovano in celle separate e non hanno modo di comunicare. Il pubblico ministero fa ad ognuno di loro la seguente proposta: se egli confessa, avrà un pieno sconto di pena – solo ammettendo però che l'altro complice non confessi a sua volta, perché in quel caso non ci sarebbe altra scelta che condannarli entrambi. Se invece il criminale decide di non confessare, subirà il massimo della pena se l'incriminazione avrà successo, mentre se nessuno dei due confesserà, entrambi saranno comunque condannati per un reato minore. Il pubblico ministero aggiunge infine che la stessa offerta è stata fatta all'altro criminale. Riassumiamo la situazione nella Tabella 1.

Tabella 1 Il dilemma del prigioniero

	C. confessa	C. non confessa
R. confessa	-5, -5	0, -10
R. non confessa	-10, 0	-1, -1

L'azione selezionata da R. determina la riga da considerare nella tabella, quella selezionata da C. la colonna; per questo motivo R. è anche detto "giocatore Riga" e C. "giocatore Colonna". In ciascun riquadro della tabella il primo numero indica il guadagno o utilità di R. e il secondo quella di C. I numeri sono negativi poiché in effetti rappresentano gli anni di carcere, che sono concettualmente dei costi per i giocatori: essere incriminati per 10 anni è peggio che esserlo per 5. Lo zero sta a indicare che il criminale ha ottenuto un pieno sconto di pena. Cosa farà ciascun giocatore? Immaginiamo di trovarci nei panni di R. Quello che notiamo è che, se C. confessa, ci conviene confessare ottenendo 5 anni invece di 10. D'altra parte anche se C. non confessa ci conviene confessare: torneremmo subito liberi anziché passare un anno in cella. Quindi qualunque cosa C. faccia, confessando otterremo un'utilità maggiore che non confessando! Un'azione con questa proprietà – la proprietà di essere preferibile alle restanti azioni indipendentemente dalle scelte degli altri giocatori – è chiamata una strategia dominante. Naturalmente è facile capire che i ruoli di R. e C. sono simmetrici, per cui anche per C. confessare è una strategia dominante. Purtroppo, l'esito complessivo è che entrambi otterranno 5 anni di carcere, più di quanto ciascuno di loro avrebbe ottenuto se entrambi non avessero confessato. Questo risultato può sembrare paradossale, ma vari esperimenti hanno mostrato che esiti di questo tipo possono davvero realizzarsi.

Il dilemma del prigioniero non è naturalmente circoscritto allo scenario appena presentato. È stato applicato nei più disparati contesti e numerosi esempi si trovano anche nelle reti informatiche. Consideriamo ad esempio due fornitori di servizi Internet or "ISP", ISP 1 e ISP 2, che debbano instradare del traffico dati (Figura 1).

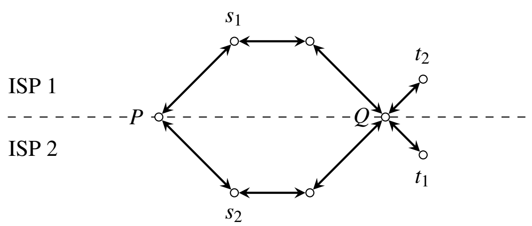


Figura 1 Lo scenario degli Internet Service Provider

Le due reti si scambiano traffico attraverso due punti di transito P e Q. Ci sono anche due coppie origine-destinazione incrociate (s_1,t_1) e (s_2,t_2). L'ISP 1 deve mandare del traffico dal punto s_1 nel proprio dominio al punto t_1 nel dominio dell'ISP 2. L'ISP 1 ha due possibilità, corrispondenti ai due punti di transito P e Q. I provider normalmente agiscono in maniera opportunistica minimizzando i costi sostenuti, mandando il traffico al punto di transito più vicino, visto che l'ISP di destinazione è costretto a instradare il traffico a prescindere dal punto in cui esso viene iniettato nella sua rete. Il punto P è più vicino, per cui usando questo nodo l'ISP 1 ottiene un costo di 1 unità (corrispondente ad un solo arco), mentre usando il punto Q ottiene un costo pari a 2. Notiamo che il punto Q è più vicino a t_1 rispetto al punto P, e quindi l'instradamento attraverso Q risulta in un cammino complessivo più breve. Consideriamo la tabella in Figura 9.3. Nel caso in cui ISP 1 utilizza il nodo P e ISP 2 utilizza il nodo Q, ISP 1 paga un costo pari ad 1 per trasferire il messaggio s_1 a ISP 2 attraverso l'arco (s_1,P). ISP 2 paga un costo pari a $5 = 3+2$ dovuto all'instradamento del messaggio s_1 tramite il cammino di lunghezza 3 da P a Q e all'instradamento del messaggio s_2 sul cammino di lunghezza 2 da s_2 a Q. Tutti gli altri valori della tabella possono essere calcolati in modo analogo.

La situazione in cui si trova ciascun provider è analoga a quella in cui si trovavano i giocatori del dilemma del prigioniero: ci sono due scelte, una delle quali appare migliore da un punto di vista opportunistico, ma che danneggia l'altro giocatore. Lo scenario degli Internet Service Provider porta ad un gioco con la seguente tabella, che pur essendo numericamente differente ha in effetti esattamente le stesse proprietà strutturali della tabella del dilemma del prigioniero: usare il punto di transito P è, per entrambi i provider, una strategia dominante (Tabella 2).

Torniamo a discutere dell'esito pessimistico che la teoria dei giochi prevede nel dilemma del prigioniero. Questo risultato poggia su varie assunzioni: che i giocatori siano razionali; che essi abbiano a cuore nient'altro che il proprio interesse; e che

Tabella 2 Il gioco degli Internet Service Provider

	ISP 2 usa *P*	ISP 2 usa *Q*
ISP 1 usa *P*	-4, -4	-1, -5
ISP 1 usa *Q*	-5, -1	-2, -2

il gioco si svolga una sola volta. In assenza di alcune di queste condizioni possono presentarsi esiti diversi e più altruistici.[1]

2.2 *Giochi di coordinamento*

In alcune situazioni strategiche, gli aspetti conflittuali possono sorgere principalmente dall'impossibilità dei giocatori di coordinare le proprie scelte. Consideriamo un altro scenario noto nella teoria dei giochi come la "battaglia dei sessi". Un uomo e una donna devono decidere come passare una serata fuori: l'uomo vorrebbe andare alla partita di calcio, la donna vorrebbe andare a un concerto. È ormai tardi per consultarsi e ognuno di loro dovrà raggiungere la meta prescelta direttamente dal proprio ufficio. Ciascuno dei due preferisce passare la serata con l'altra persona piuttosto che da solo, ma, potendo scegliere, l'uomo preferirebbe la partita e la donna il concerto. Una possibile tabella del gioco è riportata in Figura 9.4 in cui i valori indicati rappresentano il grado di utilità della scelta fatta da parte dell'uomo e della donna.

Tabella 3 La battaglia dei sessi

	L'uomo va alla partita	L'uomo va al concerto
La donna va alla partita	3, 4	1, 1
La donna va al concerto	2, 2	4, 3

Cosa prevede la teoria dei giochi in questo caso? La risposta è meno univoca di quella che abbiamo visto nel dilemma del prigioniero. Se la donna sapesse per certo che l'uomo andrà alla partita, sceglierà la partita piuttosto che il concerto;

[1] Uno degli scopritori del dilemma del prigioniero, Merrill Flood, propose un giorno ad una segretaria del suo istituto il seguente affare: poteva accettare immediatamente 100 dollari, oppure chiederne 150, a condizione però di trovare un accordo sulla loro spartizione con un'altra segretaria che era stata tenuta all'oscuro di tutto. La segretaria scelse la seconda opzione e si accordò con la sua collega per 75 dollari a testa, nonostante avrebbe potuto, altrettanto facilmente, tenere i 100 dollari senza che l'altra venisse a conoscenza di nulla.

se sapesse che andrà al concerto sarà ben lieta di recarsi con lui. In altre parole la miglior risposta della donna all'azione dell'uomo di andare alla partita consiste nell'andare alla partita, e la miglior risposta all'azione di andare al concerto consiste nell'andare al concerto. Un ragionamento analogo vale per l'uomo. Le due soluzioni (Partita, Partita) e (Concerto, Concerto) sono quindi 'stabili' nel senso che in ciascuna di esse l'azione scelta da ogni giocatore costituisce una miglior risposta all'azione dell'altro.

Queste configurazioni di "mutua miglior risposta" sono dette equilibri di Nash, dal nome del matematico statunitense e premio Nobel per l'economia John F. Nash, che ne è stato il principale studioso. Nel caso del dilemma del prigioniero, l'unico equilibrio di Nash è quello in cui entrambi i prigionieri confessano. Nella battaglia dei sessi, gli unici equilibri sono quelli in cui la donna e l'uomo passano la serata insieme: ad esempio, la soluzione in cui la donna va al concerto e l'uomo alla partita non è un equilibrio di Nash, perché la donna potrebbe aumentare la propria utilità cambiando idea e andando alla partita.

Un limite dell'equilibrio di Nash come concetto di soluzione di un gioco è che esso non è necessariamente unico, come si vede dall'esempio della battaglia dei sessi in cui gli equilibri di Nash sono due. D'altra parte, tale molteplicità consente di catturare l'incertezza degli esiti di una situazione conflittuale.

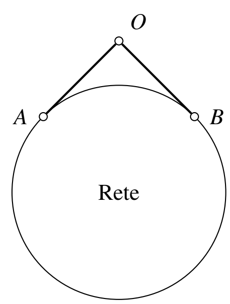


Figura 2 Scenario di instradamento del traffico in una rete

Vediamo un altro esempio tratto dal mondo delle reti. Supponiamo che due flussi di traffico abbiano origine in un nodo O della rete e debbano essere instradati verso il resto della rete, come mostrato in Figura 2. Il nodo O è connesso al resto della rete attraverso i punti di transito A e B. Entrambi i punti di transito tendono a congestionarsi facilmente, per cui se si mandano i due flussi di traffico attraverso lo stesso nodo ci sarà un ritardo aggiuntivo. Gli esiti più favorevoli in questo scenario sono quelli in cui i due giocatori si 'coordinano' inviando il loro traffico attraverso punti di transito diversi. Questa situazione può essere rappresentata da un gioco in cui i due giocatori sono i due flussi di traffico e ogni giocatore ha due opzioni, una per A e una per B. La tabella in Figura 9.6 mostra le utilità dei giocatori. Si può verificare che gli unici due equilibri di Nash sono (A,B) e (B,A).

Tabella 4 Un gioco di instradamento

	A	*B*
A	-5, -5	-1, -2
B	-2, -1	-6, -6

2.3 Strategie aleatorie

Il gioco noto come morra cinese o carta-forbici-sasso è un semplice e popolare gioco a due giocatori. I giocatori indicano contemporaneamente con un gesto della mano un oggetto scelto tra carta, forbici e sasso. Il sasso batte le forbici, le forbici battono la carta e la carta batte il sasso. In caso i giocatori facciano lo stesso gesto, si ha parità. La tabella del gioco è riportata in Tabella 5.

Tabella 5 La morra cinese

	carta	forbici	sasso
carta	0, 0	-1, 1	1, -1
forbici	1, -1	0, 0	-1, 1
sasso	-1, 1	1, -1	0, 0

Notiamo che la somma delle utilità dei due giocatori, qualunque sia l'esito del gioco, è sempre la stessa; vale a dire che un giocatore può vincere solo nella misura in cui l'altro perde (cosa che invece non si verifica in altri giochi quali il dilemma del prigioniero o la battaglia dei sessi). Tali giochi sono chiamati a somma zero. Il gioco ha un'altra particolarità: non ha equilibri di Nash. Infatti la miglior risposta di un giocatore ad una data azione dell'avversario rende l'azione dell'avversario una "peggior risposta": se sapessi che l'avversario sceglierà carta, sceglierei forbici, ma allora l'avversario preferirebbe sasso, ecc. Non esiste quindi un equilibrio di Nash nel senso che abbiamo precedentemente discusso. Cosa può dire di interessante la teoria dei giochi in casi come questo? La chiave di volta consiste nel generalizzare il concetto di strategia e permettere strategie probabilistiche o miste (cfr. Riquadro Eventi, probabilità e valori attesi). Un esempio di strategia mista è: giocherò carta con probabilità 70%, forbici con probabilità 20% e sasso con probabilità 10%. Come conseguenza di questa generalizzazione, anche il concetto di utilità di un giocatore viene sostituito da quello di utilità attesa, che è semplicemente l'utilità che mediamente si ottiene quando le azioni sono scelte secondo le distribuzioni di probabilità prescelte. Se ad esempio io gioco carta al 70%, forbici al 20%, sasso al 10% e il mio avversario risponde con forbici al 100%, allora la mia utilità attesa sarà pari a

$$0.7 \times (-1) + 0.2 \times 0 + 0.1 \times (+1) = -0.6.$$

Eventi, probabilità e valori attesi

Da un punto di vista matematico, la probabilità di un evento A è un numero reale compreso tra 0 ed 1, indicato spesso con la notazione $\mathbf{Pr}[A]$. Se A è un evento impossibile, $\mathbf{Pr}[A] = 0$, mentre se A è certo, $\mathbf{Pr}[A] = 1$.

L'evento *complementare* ad A (che si verifica se e solo se A non si verifica) ha probabilità $1 - \mathbf{Pr}[A]$.

Se A e B sono due eventi *indipendenti*, la probabilità che essi si verifichino contemporaneamente è pari a $\mathbf{Pr}[A] \cdot \mathbf{Pr}[B]$. Ad esempio, la probabilità di ottenere due volte testa lanciando due monete è pari ad $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Se A e B sono due eventi *mutuamente esclusivi*, la probabilità che almeno uno dei due si verifichi è pari a $\mathbf{Pr}[A] + \mathbf{Pr}[B]$. Ad esempio, la probabilità di ottenere un 5 o un 6 nel lancio di un dado a sei facce è pari a $1/6 + 1/6 = 1/3$.

Infine, se una variabile numerica X assume dei valori $x_1, x_2, ..., x_n$, rispettivamente secondo le probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la sua media o valore atteso è determinata dalla formula

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n.$$

Per rimarcare la differenza con le strategie miste, le strategie in cui viene selezionata un'unica azione sono dette strategie pure. Una strategia pura può comunque essere vista come un caso molto particolare di strategia mista.

Il salto concettuale da strategie pure a strategie miste ha una conseguenza interessante e per certi versi inaspettata: qualunque gioco che sia finito, ovvero che abbia un numero non infinito di giocatori e di strategie pure, ammette sempre almeno un equilibrio in strategie miste – ovvero una configurazione di mutua miglior risposta. Questa proprietà fondamentale è stata dimostrata da John Nash all'inizio degli anni Cinquanta ed è da allora nota come il teorema di Nash. Qual è dunque un equilibrio di Nash in strategie miste per il gioco della morra cinese? Supponiamo di giocare in maniera equiprobabile le tre scelte. Se il nostro avversario gioca carta con probabilità c, forbici con probabilità f, e sasso con probabilità s, la sua utilità attesa sara

$$\begin{aligned}
&(1/3) \times 0 \times c + (1/3) \times 1 \times c + (1/3) \times (-1) \times c \\
&+ (1/3) \times (-1) \times f + (1/3) \times 0 \times f + (1/3) \times 1 \times f \\
&+ (1/3) \times 1 \times s + (1/3) \times (-1) \times s + (1/3) \times 0 \times s \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Quindi l'utilità attesa del nostro avversario sarà zero, indipendentemente dalla strategia mista che egli sceglierà. Se anch'egli gioca in maniera equiprobabile carta, forbici e sasso, allora l'utilità attesa di entrambi sarà zero e nessuno dei due avrà modo di ottenere un'utilità attesa maggiore di zero attraverso un cambio di strategia. Si avrà cioè una situazione di mutua miglior risposta, esattamente come richiesto da un equilibrio di Nash. In effetti in questo caso tale esito è l'unico equilibrio di Nash del gioco, cosa che però non è vera in generale, come abbiamo visto nel gioco della battaglia dei sessi. Il lettore potrebbe chiedersi se nella realtà la morra cinese sia giocata come previsto dalla teoria. È sicuramente vero che attenendosi alla strategia ottimale non si può avere un'utilità attesa negativa (ma è certo possibile essere particolarmente sfortunati!). Il punto però è che molti avversari, per delle limitazioni di vario tipo come il fatto di effettuare scelte non perfettamente casuali, possono non scegliere esattamente la strategia ottimale ma una diversa strategia mista. In questo caso possiamo ottenere un'utilità attesa maggiore di zero adottando una strategia mista diversa da quella che assegna la stessa probabilità alle tre scelte. Se ad esempio il nostro avversario non gioca mai sasso, ma solo forbici e carta in modo equiprobabile, possiamo incrementare la nostra utilità attesa giocando sempre forbici. La nostra utilità attesa diviene in questo caso positiva, poiche

$$1 \times 0.5 \times 0 + 1 \times 0.5 \times 1 = 0.5.$$

Per questo motivo, in giochi come la morra cinese, i giocatori che spesso hanno più successo sono quelli che tentano di apprendere la strategia dell'avversario, allo stesso tempo adattando la propria ad essa.

2.4 Falchi e colombe

Abbiamo finora esemplificato le situazioni di potenziale conflitto attraverso dei semplici ma paradigmatici giochi a due giocatori: il dilemma del prigioniero, la battaglia dei sessi e la morra cinese. Vogliamo aggiungere un gioco altrettanto interessante alla lista: il gioco della "corsa dei polli". Lo scenario è il seguente: due sfidanti si mettono alla guida di due auto, dirigendole una contro l'altra a gran velocità. Il primo dei due che, sterzando, devierà dalla traiettoria fatale sarà il perdente, ovvero il 'pollo'. Il giocatore che invece avrà tenuto duro sarà il vincitore. Naturalmente chi gioca alla corsa dei polli dovrebbe tentare di tenere duro per spuntarla sul suo avversario, ma se entrambi i giocatori attuassero questa idea l'esito diverrebbe disastroso!

Tabella 6 La corsa dei polli

	Sterza	Dritto
Sterza	0, 0	-1, 1
Dritto	1, -1	-100, -100

Analizzando il gioco (cfr. Tabella 6) alla luce delle nozioni viste finora, possiamo notare che esistono due soli equilibri di Nash in strategie pure: quello in cui il primo giocatore sterza e l'altro va dritto, e quello in cui accade l'opposto. Esiste per caso qualche equilibrio di Nash in strategie solo miste? In effetti sì. Indichiamo con R_s

e R_d la probabilità con cui il primo giocatore (giocatore Riga) sterzi o vada dritto, rispettivamente. Se consideriamo la configurazione in cui $R_s = 99\%$ e $R_d = 1\%$, notiamo che si ha

$$0 \times R_s + (-1) \times R_d = 1 \times R_s + (-100) \times R_d = -1$$

Questo significa che l'utilità attesa per il secondo giocatore è la stessa (-1) a prescindere dalla sua azione. Similmente, se $C_s = 99\%$ e $C_d = 1\%$ sono le probabilità con cui il secondo giocatore sterza e va dritto rispettivamente, si ha

$$0 \times C_s + (-1) \times C_d = 1 \times C_s + (-100) \times C_d,$$

per cui anche l'utilità attesa del primo giocatore è la stessa a prescindere dalla sua azione. Tale combinazione di strategie miste costituisce quindi un equilibrio di Nash. Giochi del tipo della corsa dei polli sono in genere quelli in cui i giocatori devono decidere se essere 'falchi' o 'colombe'. La crisi dei missili a Cuba del 1962 fu analizzata dai consiglieri del presidente Kennedy e classificata proprio come una situazione di quel tipo, dove l'esito catastrofico poteva essere la guerra nucleare. Kennedy decise di far sapere a Krusciov che gli Stati Uniti non avrebbero recitato la parte della colomba, anche a costo della guerra. Fortunatamente per tutti, Krusciov decise di cedere. Il gioco della corsa dei polli ci permette anche di introdurre una importante estensione del concetto di equilibrio di Nash, proposta dal matematico israeliano Robert J. Aumann (anche egli premio Nobel per l'Economia) nel 1974. In questa estensione, nota come equilibrio correlato, si considerano accettabili tutte quelle soluzioni rispetto alle quali i giocatori non hanno incentivo a variare la propria strategia, ammesso che la strategia che i giocatori devono seguire venga indicata da una terza parte fidata. Ad esempio, consideriamo una terza parte che con probabilità 1/2 indichi al primo giocatore di sterzare e al secondo di andare dritto, e con probabilità 1/2 dia l'indicazione inversa. In questo caso, se uno dei due giocatori assume che l'altro seguirà l'indicazione che gli è stata fornita, avrà effettivamente ogni interesse a comportarsi esattamente come indicato, in qualche modo dunque auto-avverando l'indicazione. Si tratta in realtà di un fenomeno non lontano dalla nostra esperienza quotidiana: un semaforo stradale non è nient'altro che una tale terza parte fidata nel gioco di tipo corsa dei polli in cui due automobilisti provenienti da vie diverse devono attraversare uno stesso incrocio.

3 Aspetti computazionali della teoria dei giochi

Abbiamo visto attraverso gli esempi precedenti che teoremi matematici quali il teorema di Nash assicurano, per determinati giochi, l'esistenza di un equilibrio del tipo desiderato. Ci si può chiedere se esistano degli algoritmi che ci permettano di trovare tali equilibri. Sapere che esiste una strategia ottima per un gioco non ci aiuta molto se non siamo in grado di calcolarla. Per questo motivo l'aspetto computazionale della teoria dei giochi è cruciale. Si può dire anche di più, e cioè che se un certo tipo di equilibrio è computazionalmente difficile da determinare, allora probabilmente esso non riflette pienamente gli esiti realistici di un gioco, perché in fondo i partecipanti, che siano persone o società o software appositamente programmati, hanno sempre un potere computazionale limitato. Le proprietà computazionali degli equilibri quindi ci aiutano anche a comprendere quali concetti di equilibrio siano davvero più realistici.

3.1 Giochi a somma zero e programmazione lineare

Nel caso di giochi in cui i giocatori muovono simultaneamente, il calcolo degli equilibri si fa più o meno complicato a seconda del tipo di equilibrio cercato. Ad esempio, nel caso in cui si cerchi un equilibrio di Nash in strategie pure, in realtà è sufficiente verificare tutte le combinazioni di strategie dei giocatori e per ciascuna verificare se entrambi i giocatori stiano utilizzando una miglior risposta. Se il primo giocatore ha m azioni a disposizione e il secondo n, dobbiamo considerare cioè $m \times n$ casi e per ognuno di questi confrontare le utilità con altri $m+n-2$ valori. Come abbiamo già visto, comunque, un equilibrio in strategie pure potrebbe non esistere. Molto più interessante è il caso degli equilibri di Nash in strategie miste. Se si considerano giochi qualunque (anche se i giocatori sono solo due) le cose si fanno presto complicate. Iniziamo quindi dal caso relativamente più semplice di giochi a somma zero; questo caso è stato analizzato per la prima volta nel 1928 da John von Neumann. I giochi a somma zero possono essere descritti da un'unica matrice i cui elementi indicano allo stesso tempo il profitto del primo giocatore e la perdita del secondo, come nella Tabella 7 dove, per esempio, se il primo giocatore sceglie la strategia A ed il secondo la strategia C, il primo guadagna 2 ed il secondo perde 2.

Tabella 7 Un esempio di gioco a somma zero

	C	**D**
A	2	-1
B	1	3

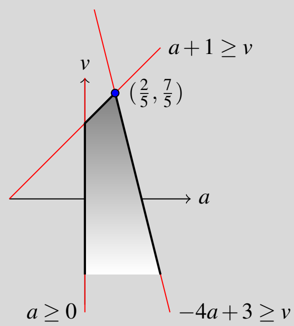
L'idea alla base del risultato di von Neumann è che una strategia all'equilibrio deve essere stabile anche quando è diventata nota al proprio avversario. Se la strategia mista del giocatore "riga" è nota, il giocatore "colonna" selezionerà una strategia mista in risposta che minimizzi la sua perdita rispetto ad essa. Ma questa, essendo il gioco a somma zero, è anche una strategia mista che minimizza il profitto del giocatore riga. In previsione di ciò quindi il giocatore riga deve scegliere una strategia che minimizzi la sua perdita massima, o in altre parole che massimizzi il suo profitto minimo. Tale strategia è chiamata strategia minimax: i dettagli matematici sono dati nel riquadro seguente.

Strategia minmax

La strategia minmax può essere espressa attraverso un sistema di disequazioni, dove le variabili a e b rappresentano la probabilità con cui il giocatore sceglie la strategia A o B rispettivamente, e dove la variabile v rappresenta il profitto ottenuto dal giocatore.

$$\begin{aligned} \max\ & v \\ & 2a+b \geq v \\ & -a+3b \geq v \\ & a+b = 1 \\ & a,b \geq 0. \end{aligned}$$

Le prime due condizioni ci assicurano che qualunque sia la risposta del giocatore colonna, il profitto del giocatore riga sarà almeno v. Le altre condizioni servono semplicemente ad assicurare che si ottenga una strategia mista. Risolvendo il sistema – ad esempio graficamente (si veda la figura nel riquadro) – otteniamo $a = 2/5$, $b = 3/5$, vale a dire che il giocatore riga deve giocare l'azione A con probabilità 40% e l'azione B con probabilità 60%. Ciò assicura un profitto atteso $v = 7/5$ al giocatore riga.



Ovviamente il ragionamento vale, mutatis mutandis, anche per il giocatore colonna. In questo caso, se w rappresenta la minima perdita del giocatore colonna, otteniamo $w = 7/5$. Il fatto che v sia uguale a w è vero in generale e corrisponde proprio al teorema di von Neumann: quando entrambi i giocatori seguono una strategia minimax, si raggiunge un equilibrio. In generale tali sistemi di disequazioni costituiscono istanze di problemi di programmazione lineare, un'area ben studiata dell'ottimizzazione matematica. Sono noti algoritmi che risolvono tali problemi in tempo polinomiale (cfr. Cap. 2). Gli stessi algoritmi possono quindi essere direttamente applicati al calcolo di equilibri in strategie miste in giochi a somma zero a due giocatori.

3.2 Punti fissi: il lemma di Sperner ed il teorema di Nash

Cosa succede quando si passa dai giochi a somma zero al caso generale? È ancora possibile calcolare efficientemente gli equilibri di Nash in strategie miste? In realtà, allo stato attuale della ricerca nessuno ha una risposta definitiva a questa domanda apparentemente semplice. Un approccio naturale, nel cercare di capire come si possa trovare un equilibrio di Nash in un gioco a somma non zero, è di fare un passo indietro e analizzare la dimostrazione del teorema di Nash – in altre parole, di capire perché debba esistere un equilibrio in strategie miste. Qui non daremo i dettagli della dimostrazione, ma vogliamo accennare ad alcune idee su cui essa si basa. Il teorema di Nash è un cosiddetto teorema del punto fisso, che per una data funzione F asserisce che, sotto opportune condizioni, l'equazione F(x) = x ha sempre soluzione – in altre parole, che la funzione F ha almeno un punto fisso. Nel caso del teorema di Nash, x rappresenta un insieme di strategie miste (una per ogni giocatore) e la funzione F(x) fornisce un nuovo insieme di strategie miste in cui ogni giocatore usa la sua miglior risposta alla configurazione in cui gli altri giocatori giocano in accordo con quanto specificato da x. L'equazione rappresenta quindi il fatto che si cerca un insieme di strategie miste tali che ciascuna è miglior risposta per l'altra. Per illustrare una delle idee su cui si basa il teorema, parliamo di un risultato usato nella dimostrazione del teorema e fortemente collegato ad esso, noto come lemma di Sperner. Una delle conseguenze di questo lemma è la seguente: prendiamo un triangolo ABC e suddividiamolo arbitrariamente in triangoli più piccoli, come in Figura 9.11a. Coloriamo inoltre ogni vertice di ciascun triangolo con uno tra tre colori, secondo le seguenti regole:

1. i tre vertici A, B, C del triangolo originale devono essere colorati con tre colori differenti;
2. i vertici che giacciono su un lato del triangolo originale non possono essere colorati col colore assegnato al vertice opposto a quel lato;
3. i vertici restanti possono essere colorati in maniera qualunque.

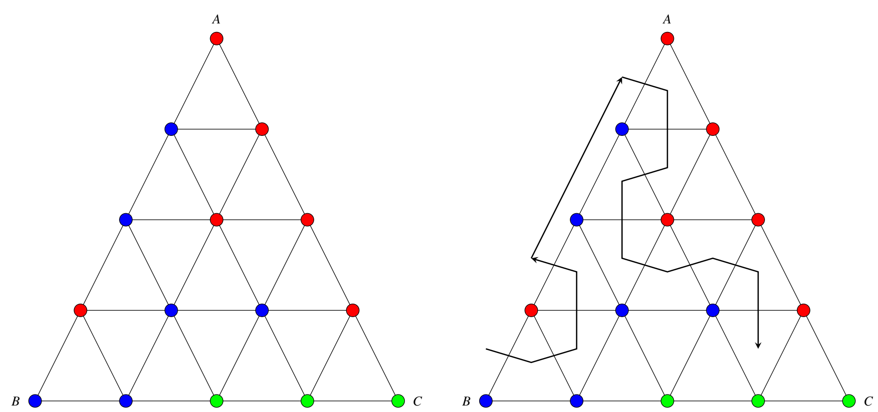


Figura 3 Illustrazione del lemma di Sperner

Il lemma di Sperner assicura che, indipendentemente da come abbiamo colorato i vertici, esisterà un triangolo della suddivisione i cui vertici hanno tre colori distinti.

E in effetti nel caso della figura tale triangolo esiste. Per quale motivo? Per capirlo, immaginiamo ogni triangolo della suddivisione come una stanza con tre pareti, una per lato. Una parete è dotata di una porta se il corrispondente lato del triangolo ha un vertice bianco ed uno nero. È facile verificare che una stanza può avere zero, una o due porte, ma non tre. Inoltre, se una stanza ha una sola porta, essa dovrà corrispondere ad un triangolo con vertici di tre colori distinti, perché altrimenti dovrebbe esserci un altro lato bianco-nero e le porte sarebbero due. Notiamo che dall'esterno del triangolo originale sono accessibili un numero dispari di porte (si può verificare che ciò è sempre vero). Prendiamone una qualunque e proseguiamo di stanza in stanza. Il percorso dovrà terminare necessariamente o in una stanza con una sola porta, o di nuovo all'esterno del triangolo ABC. Ma in quest'ultimo caso il percorso ha usato due porte che danno sull'esterno del triangolo ABC. Poiché il numero totale di tali porte è dispari, deve esisterne un'altra da cui poter continuare nello stesso modo. L'unico modo di terminare questo processo è dunque in una stanza con una sola porta, corrispondente quindi al triangolo cercato. La Figura 9.11b illustra il procedimento appena spiegato. Questo procedimento fornisce quantomeno una vaga idea del perché trovare un equilibrio di Nash in strategie miste appaia difficile. Il procedimento citato sopra per determinare il triangolo che verifica il lemma di Sperner è corretto, ma può in generale determinare percorsi molto lunghi richiedendo così un tempo eccessivo. Nulla toglie che possa esistere qualche metodo più intelligente di trovare in qualche modo più 'diretto' il triangolo cercato, anche se ciò appare improbabile.

3.3 Equilibri di Nash misti in giochi a somma non zero

Esiste un algoritmo, per quanto decisamente inefficiente, che permette di determinare un equilibrio di Nash in strategie miste per un qualunque gioco a due giocatori. Un'idea alla base dell'algoritmo è il concetto di supporto di una strategia mista. Il supporto è semplicemente l'insieme delle azioni che nella strategia mista considerata vengono selezionate con una probabilità maggiore di zero. In altre parole è l'insieme delle strategie pure che concorrono a formare una data strategia mista. Ora, una proprietà degli equilibri è che una strategia mista costituisce una miglior risposta se e solo se tutte le strategie pure del suo supporto sono miglior risposte. Questo fatto è utile per determinare un equilibrio di Nash. Nel Riquadro Calcolare un equilibrio è riportato un esempio completo di quanto ora detto accompagnato da tutti i relativi calcoli matematici.

Calcolare un equilibrio

Consideriamo il seguente esempio.

$$\begin{array}{c|cc} & C & D \\ \hline A & 2,1 & 0,3 \\ B & 1,2 & 4,1. \end{array}$$

Le strategie pure del giocatore riga sono A e B, quelle del giocatore colonna C e D. Chiediamoci se esiste un equilibrio di Nash in cui il supporto del primo giocatore è $\{A,B\}$ e quello del secondo $\{C,D\}$. Chiamiamo a,b,c,d le probabilità assegnate alle rispettive strategie. Allora si deve avere

$$\begin{aligned} a,b,c,d &> 0, \\ a+b &= 1, \\ c+d &= 1. \end{aligned}$$

Inoltre, affinché (a,b) sia una miglior risposta a (c,d), e poiché stiamo supponendo che sia A che B siano nel supporto di (a,b), si deve avere che A è una miglior risposta a (c,d) e quindi deve fornire un utilità attesa buona almeno tanto quanto si otterrebbe con B:

$$2c \geq c+4d,$$

ma allo stesso modo B deve essere una miglior risposta a (c, d):

$$c+4d \geq 2c.$$

Otteniamo quindi $2c = c+4d$, che in aggiunta alle equazioni precedenti fornisce $c = 4/5$, $d = 1/5$. Analogamente si può dedurre, dal fatto che sia C che D devono essere miglior risposta ad (a,b), che $a+2b = 3a+b$ e quindi $a = 2/3$, $b = 1/3$. Un tale ragionamento mostra che la difficoltà principale nel determinare un equilibrio di Nash risiede nella determinazione dei supporti dei due giocatori. Una volta noti i supporti, come abbiamo illustrato, è sufficiente verificare se un certo sistema di disequazioni lineari ammette soluzione. Un possibile algoritmo per determinare un equilibrio di Nash, quindi, per quanto inefficiente, consiste nell'enumerare tutte le possibili coppie di supporti e per ognuna di esse verificare se essa dà luogo ad un equilibrio. Il tempo di esecuzione di tale algoritmo è dominato dal numero di possibili coppie di supporti, che, se ci sono m azioni per un giocatore ed n per l'altro, è pari a 2^{m+n}.

4 Inefficienze

4.1 La tragedia delle risorse comuni

In molti degli esempi discussi finora abbiamo visto come sia possibile formalizzare in linguaggio matematico il genere di comportamenti individuali che emergono dall'interazione di agenti razionali, ognuno dei quali persegue autonomamente il proprio interesse. Una domanda naturale è: cosa accade al sistema nel suo complesso? Che livelli di "benessere sociale" si ottengono quando ciascun agente persegue separatamente il proprio fine? Perché queste domande abbiano senso occorre dare una definizione di cosa si intende con benessere sociale. Ci sono molte definizioni possibili, ugualmente valide. Ad esempio, potremmo voler intendere con benessere sociale, in senso utilitaristico, la somma dei profitti di tutti i giocatori; oppure l'utilità del giocatore col profitto minore (il più 'povero'). In ogni caso dovrebbe essere intuitivamente chiaro che quando gli utenti di un sistema seguono egoisticamente i propri fini, il benessere sociale risultante potrebbe non essere massimizzato. In altre parole, la soluzione determinata dagli agenti non è sempre una soluzione globalmente ottima.

Consideriamo ad esempio un semplice scenario in cui un gruppo di 100 utenti condivide l'accesso ad una stessa connessione Internet, consistente in una certa banda di trasmissione finita B. Ogni utente può regolare l'ammontare di banda che intende utilizzare. La strategia dell'utente i-esimo consiste nella frazione $x(i)$, con $0 \leq x(i) \leq 1$, della quantità di banda utilizzata (l'utente utilizza così una banda pari a $x(i) \times B$). Supponiamo che il profitto di un utente dipenda dalla quantità di banda da lui utilizzata, ma anche dalla quantità di banda non utilizzata da nessun utente, secondo la formula

$$u(i) = x(i) \times (1 - x(1) - x(2) - x(3) - \ldots - x(100)).$$

Il secondo fattore in questa formula cattura il fatto che la latenza del canale di comunicazione è minore quando il canale è poco utilizzato, mentre se il canale è quasi saturo la latenza è molto alta e quindi l'utilità diminuisce di molto. (Per semplicità non richiediamo che la somma delle frazioni x(i) sia inferiore ad 1, motivo per cui il secondo fattore può perfino diventare negativo). Otteniamo così un gioco a molti giocatori. Tale gioco non è finito (il numero di giocatori è finito, ma le strategie variano in un insieme continuo e sono quindi infinite), per cui non si può applicare direttamente il teorema di Nash. Ciononostante, in questo caso un equilibrio di Nash esiste comunque; si può trovare che esso corrisponde alla soluzione in cui ogni utente utilizza una frazione di banda pari a 1/101. La connessione Internet in questa soluzione è quasi del tutto satura, visto che è utilizzata per un frazione totale pari a 100/101. L'utilità di ciascun giocatore è di conseguenza $1/101 \times (1 - 100/101) = 1/(101)^2$. Qual è il benessere sociale in questo caso? Se con benessere sociale intendiamo l'utilità totale dei giocatori, otteniamo un benessere sociale pari a $100/(101)^2$, che è circa 0,01. Però, se avessimo costretto ogni utente ad utilizzare una frazione di banda pari a 1/200, metà della banda totale sarebbe rimasta libera, per cui l'utilità di ciascun utente sarebbe stata pari a 1/400, e l'utilità totale pari a 1/4 = 0,25. Questo valore è 25 volte più grande del valore ottenuto all' equilibrio (0,01), per cui si può affermare che in questo caso l'autonomia dei giocatori si è tradotta in una grande diminuzione del benessere sociale. Questo fenomeno negativo è comune in economia, ed è noto come la tragedia dei pascoli comuni. Si verifica ogni volta che gli interessi individuali di un gruppo di utenti tendono a distruggere i vantaggi derivanti dall'utilizzo di una risorsa comune. Naturalmente non tutte le interazioni economiche sono di questo tipo e talvolta l'interesse individuale si avvicina a quello collettivo, tuttavia tali 'tragedie' sono sicuramente frequenti.

Per quanto tali fenomeni fossero noti da tempo, solo più di recente i ricercatori della comunità informatica, a partire da Elias Koutsoupias e Christos Papadimitriou, ne hanno proposto una analisi quantitativa attraverso il concetto di prezzo dell'anarchia: ovvero il rapporto tra il benessere sociale ottimo e il benessere sociale all'equilibrio (o tra costo sociale all'equilibrio e costo sociale ottimo)4. Più tale rapporto è vicino ad uno, più è ragionevole sostenere che l'interesse individuale coincide approssimativamente con quello collettivo, mentre se tale rapporto è molto alto (come nel caso del gioco della condivisione di banda) gli esiti nei due casi possono rivelarsi molto diversi. Il concetto di prezzo dell'anarchia è stato applicato e continua ad essere applicato allo studio di molti contesti economici, in particolare di quelli legati alle reti.

4.2 Giochi di instradamento

Immaginiamo uno scenario familiare: dobbiamo recarci in automobile da un punto ad un altro della città, e la scelta dell'itinerario che seguiremo avrà un profondo impatto sul tempo di percorrenza. Tale tempo dipenderà anche da quanti altri automobilisti hanno scelto lo stesso itinerario, per evidenti problemi di congestione. Vediamo così che tale scenario è modellizzabile come un gioco in cui i giocatori sono i guidatori e le azioni sono gli itinerari. Quali sono gli equilibri del gioco e quanto sono inefficienti? La domanda non è peregrina, anche perché lo stesso modello si applica altrettanto bene alle reti informatiche, con la differenza che i flussi da instradare sono flussi di dati anziché di veicoli. Non stupisca dunque se la risposta è stata in buona parte data da ricercatori informatici, oltre che da ingegneri del traffico. Per capirla dobbiamo innanzitutto specificare meglio il nostro modello. Modelliamo la rete di traffico con un grafo in cui i nodi rappresentano i luoghi di interesse e gli archi rappresentano le vie di comunicazione. Inoltre, per poter descrivere gli effetti di congestione, assegniamo ad ogni arco una funzione di costo (o latenza) che fornisce il costo di percorrenza per ogni dato valore del traffico su quell'arco. Ad esempio, nel grafo di Figura 4 l'arco superiore ha una funzione costo costante (funzione c1), mentre per l'arco inferiore la funzione costo è la funzione identità (funzione c2).

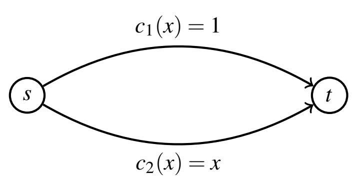


Figura 4 L'esempio di Pigou

Selezioniamo infine un punto di origine s, un punto di destinazione t e la quantità di flusso, ovvero l'ammontare di traffico che deve essere instradato da s a t. Possiamo immaginare tale flusso come composto da un'infinità di "particelle di traffico", ognuna delle quali da sola ininfluente, ma autonoma (in questa formulazione abbiamo quindi un gioco con infiniti giocatori – l'esistenza di un equilibrio non è dunque assicurata dal teorema di Nash, ma può essere dimostrata con tecniche analoghe). Il costo complessivo di un certo flusso si ottiene sommando, su ciascun arco, il prodotto tra la quantità di flusso che attraversa l'arco e la latenza dell'arco. Ad esempio, se in Figura 9.12 si avesse un flusso pari a 0,2 sull'arco superiore e pari a 0,8 sull'arco inferiore, il costo complessivo sarebbe pari a $0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,8 = 0,66$.

Supponiamo ad esempio di avere una quantità complessiva di traffico pari ad 1 (ad esempio 1 migliaio di automobili). Se tutti utilizzassero il collegamento superiore della figura, il costo sarebbe $1 \times c1(1) = 1$. Tale configurazione però non rappresenta un equilibrio. Infatti, se nessuno usasse il collegamento inferiore, un automobilista avrebbe convenienza a lasciare la prima strada per la seconda, visto che il costo che troverebbe sul nuovo itinerario sarebbe pari a $c2(0,001) = 0,001$, quindi molto più piccolo di 1. In generale, il traffico è in equilibrio se per ogni coppia di percorsi P e P' che vanno da s a t nella rete, si ha che se il traffico lungo P è positivo, allora il costo lungo P non è maggiore del costo lungo P'. Di conseguenza, i costi dei percorsi effettivamente usati all'equilibrio sono tutti uguali tra loro, e sono tutti minori o uguali al costo nel quale un automobilista incorrerebbe in un qualunque percorso non utilizzato. Se il traffico fosse diviso equamente tra i due collegamenti, il costo totale sarebbe pari a $1/2 \times c1(1/2) + 1/2 \times c2(1/2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$. Ancora però non si avrebbe un equilibrio, poiché il flusso lungo il collegamento superiore è positivo ma quello inferiore ha un costo (pari a 1/2) minore del costo di quello superiore (pari ad 1). Si può verificare che l'unico equilibrio in questo esempio corrisponde al caso in cui il flusso è instradato solo attraverso il collegamento inferiore. Si ottiene così un costo totale pari a $1 \times c2(1) = 1$. Come visto sopra tale valore non è ottimo; in termini di prezzo dell'anarchia si ha un rapporto tra costo all'equilibrio e costo ottimo pari a 4/3.

L'esempio appena visto era stato già discusso negli anni Venti dall'economista britannico Arthur C. Pigou. In seguito si è compreso che i comportamenti opportunistici degli utenti possono portare perfino a degli esiti controintuitivi, come mostra il seguente esempio dovuto al matematico tedesco Dietrich Braess (Figura 9.13). Ancora una volta assumiamo di dover instradare una unità di flusso. Nella rete raffigurata a sinistra, il flusso all'equilibrio è quello in cui una metà del traffico segue il percorso (s,v,t) e l'altra metà segue il percorso (s,w,t). Il costo totale è dunque $(1/2) \times (1/2+1) + (1/2) \times (1+1/2) = 1,5$.

Nella rete di destra è stata aggiunta una 'superstrada' a costo zero che unisce v e w. Ora, nella nuova rete, l'unico flusso in equilibrio è quello che manda tutto il flusso lungo il percorso (s,v,w,t). Ma tale flusso ha un costo totale pari a $1 \times (1+0+1) = 2$, maggiore del precedente! La decisione apparentemente benefica di aggiungere una strada da v a w ha così causato un peggioramento delle prestazioni del sistema. Tale fenomeno è conosciuto ormai come paradosso di Braess.

Anomalie a parte, è possibile fornire dei risultati positivi per tali giochi di instradamento? Quanto grande può essere in generale il prezzo dell'anarchia di tali giochi? In generale, la risposta dipende non tanto dalla struttura della rete, quanto dal tipo di funzioni di costo. Se tali funzioni sono funzioni lineari, ovvero della forma $c(x) = ax + b$, Tim Roughgarden ed Éva Tardos hanno dimostrato che il prezzo dell'anarchia non è mai superiore a 4/3 – per cui le cose non vanno mai peg-

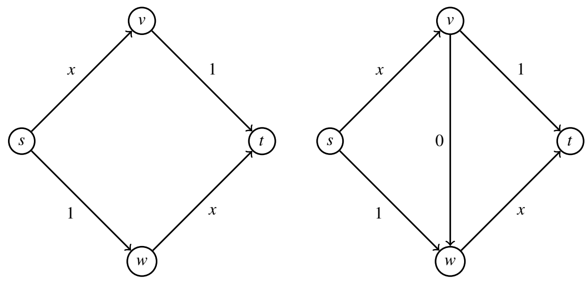


Figura 5 Le due reti del paradosso di Braess

gio che nell'esempio di Pigou, anche in reti più grandi e complesse. D'altra parte, se le funzioni di costo presentano delle 'non linearità', il prezzo dell'anarchia può essere molto alto e non è possibile limitarlo a priori. Informalmente, ciò corrisponde a dire che le cose possono andare male quando le strade hanno una capacità massima, per quanto grande, oltre la quale si rimane imbottigliati.

Note bibliografiche

Il testo che segna ufficialmente la nascita della teoria dei giochi è l'ormai classico von Neumann e Morgenstern [5]; particolarmente significativo è che esso sia dovuto a John von Neumann, uno dei padri dell'informatica oltre che geniale matematico. Moderne trattazioni della teoria dei giochi e delle sue applicazioni economiche possono essere trovate in Osborne e Rubinstein [7] e Mas-Colell et al [3]. L'enciclopedico volume curato da Aumann e Hart [1] fornisce un aggiornato stato dell'arte della teoria e contiene numerosi ulteriori puntatori alla letteratura. Segnaliamo anche due testi divulgativi in italiano: Mérő [4] e Lucchetti [2]. Per quanto riguarda la nascente teoria algoritmica dei giochi e del progetto di meccanismi, un testo di riferimento è il recente Nisan et al. [6], a cui rimandiamo per l'approfondimento dei vari argomenti trattati nel presente capitolo. Il testo contiene anche un'eccellente introduzione al progetto di meccanismi di mercato ai fini delle sue applicazioni algoritmiche. I giochi di instradamento sono trattati anche nella monografia di Roughgarden [8].

1. Aumann, R.J., Hart, S. (eds.): Handbook of Game Theory with Economic Applications. Elsevier, Amsterdam (2002)
2. Lucchetti, R.: Di duelli, scacchi e dilemmi. Paravia, Torino (2001)
3. Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R.: Microeconomic Theory. Oxford University Press, New York (1995)
4. Mérő, L.: Calcoli morali. Teoria dei giochi, logica e fragilità umana. Dedalo, Bari (2000)
5. von Neumann, J., Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, Princeton (1944)
6. Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, É., Vazirani, V. (eds.): Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Cambridge (2007)

7. Osborne, M.J., Rubinstein, A.: A Course in Game Theory. MIT Press, Cambridge (1994)
8. Roughgarden, T.: Selfish Routing and the Price of Anarchy. MIT Press, Cambridge (2005)