Laboratorio di Ricerca Operativa

G. Liuzzi[1]

Venerdí 24 Aprile 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il problema del commesso viaggiatore (TSP)

- Concorso indetto da Procter & Gamble nel 1962
- Determinare il tour di lunghezza minima passante per 33 città USA

Il problema del commesso viaggiatore (TSP)

Il problema del commesso viaggiatore (TSP)

- Vincitore: Gerald Thompson (Carnegie Mellon University)

Problema del Commesso Viaggiatore

Problema: Dato un insieme di città, determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.

In termini più generali:
Dato un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = V \times V$, e assegnate delle lunghezze δ_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in E$, si vuole determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una ed una sola volta per ogni nodo del grafo.

Problema del Commesso Viaggiatore

Problema: Dato un insieme di città, determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.

In termini più generali:
Dato un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = V \times V$, e assegnate delle lunghezze δ_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in E$, si vuole determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una ed una sola volta per ogni nodo del grafo.

- Un ciclo che passa una ed una sola volta per ogni nodo di G è detto ciclo HAMILTONIANO
- Il numero di soluzioni ammissibili del problema (ovvero di cicli Hamiltoniani nel grafo) è finito e pari a

Problema del Commesso Viaggiatore

Problema: Dato un insieme di città, determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.

In termini più generali:
Dato un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E = V \times V$, e assegnate delle lunghezze δ_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in E$, si vuole determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una ed una sola volta per ogni nodo del grafo.

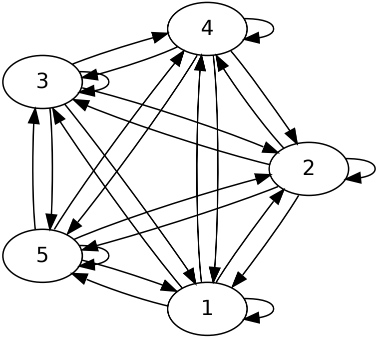
- Un ciclo che passa una ed una sola volta per ogni nodo di G è detto ciclo HAMILTONIANO
- Il numero di soluzioni ammissibili del problema (ovvero di cicli Hamiltoniani nel grafo) è finito e pari a

$$(n-1)!$$

  numero di permutazioni di $n-1$ oggetti.

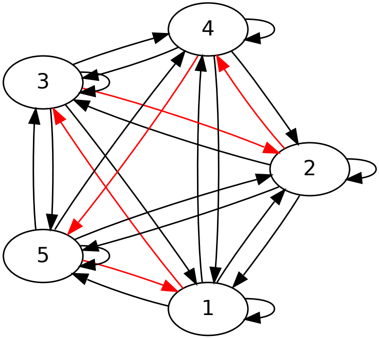
Rappresentazione del problema

Sia $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Graficamente abbiamo:



Rappresentazione del problema

Sia $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Il ciclo corrsipondente alla permutazione dei nodi $\{1, 3, 2, 4, 5\}$ è evidenziato in rosso



Formulazione matematica del problema

Passo 1. Scelta delle variabili:

Formulazione matematica del problema

Passo 1. Scelta delle variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene ad un ciclo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione matematica del problema

Passo 1. Scelta delle variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene ad un ciclo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

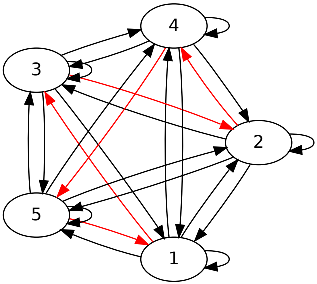
Quindi, per il ciclo di prima, se indichiamo con

$$\bar{E} = \{(1,3),(3,2),(2,4),(4,5),(5,1)\}$$

l'insieme degli archi che compongono il ciclo, abbiamo:

$$x_{13} = x_{32} = x_{24} = x_{45} = x_{51} = 1$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1, \quad \forall (i,j) \in \bar{E}, \\ x_{ij} &= 0, \quad \forall (i,j) \in E \setminus \bar{E}. \end{aligned}$$



Formulazione matematica del problema

Passo 2. Funzione obiettivo:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} \delta_{ij} x_{ij}.$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall \ (i, j) \in E$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall \ (i,j) \in E$$

Servono dei vincoli (delle relazioni) che IMPONGANO che

$x_{ij} = 1$, *se* (i,j) *appartiene ad un ciclo*

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall \ (i, j) \in E$$

Servono dei vincoli (delle relazioni) che IMPONGANO che

$x_{ij} = 1$, *se* (i, j) *appartiene ad un ciclo*

Concentriamoci sul nodo 4

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

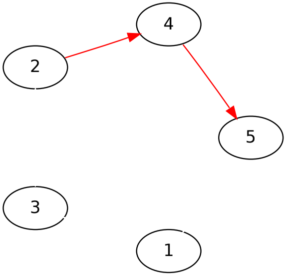
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall \ (i,j) \in E$$

Servono dei vincoli (delle relazioni) che IMPONGANO che

$x_{ij} = 1$, *se* (i,j) *appartiene ad un ciclo*

Concentriamoci sul nodo 4
e notiamo che

- un solo arco ENTRA in 4
- un solo arco ESCE da 4



Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall \ (i, j) \in E$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ \forall\ (i,j) \in E$$

$$\sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = 1, \qquad \forall k \in V,$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall\ (i,j) \in E$$

$$\sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = 1, \qquad \forall k \in V,$$

$$\sum_{(k,j)\in E} x_{kj} = 1, \qquad \forall k \in V,$$

Albero ricoprente a costo minimo

Problema: Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, in cui $E \subset V \times V$ è un insieme di coppie non ordinate, ed una lunghezza δ_e per ogni $e \in E$, determinare l'albero $T = (V, F)$ a costo minimo.

N.B. un sottografo di G, $T = (V, F)$, è un albero se è aciclico e connesso. Allora $|F| = |V| - 1$

Formulazione come problema di PLI

Variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene a T} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

funzione obiettivo

$$\sum_{(i,j)\in E} \delta_{(i,j)} x_{ij}$$

Vincoli

- $\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} = |V| - 1$
- $\sum_{i\in S, j\notin S} x_{ij} \geq 1$, per ogni $S \subset V$, $S \neq \emptyset$