Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2015-16 – 26 Maggio 2017

prova d'esame

1. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y,z} \; x^2 + xy + yz + y^2 - z^2.$$

Sia $X'_0 = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4\}$, con $\mathbf{x}'_1 = (0,0,0)^\top$, $\mathbf{x}'_2 = (1,0,0)^\top$, $\mathbf{x}'_3 = (0,1,0)^\top$ e $\mathbf{x}'_4 = (0,0,1)^\top$, l'insieme dei punti iniziali (non ordinato) dell'algoritmo di Nelder& Mead. Con riferimento all'algoritmo di Nelder& Mead,

- calcolare i punti: $\mathbf{x}_c$, $\mathbf{x}_r$, $\mathbf{x}_e$, $\mathbf{x}_{oc}$, $\mathbf{x}_{ic}$;
- calcolare l'insieme di punti X_1 determinato dall'algoritmo nella sua prima iterazione;
- calcolare l'insieme di punti X_1 determinato dall'algoritmo nella sua prima iterazione se $\mathbf{x}'_1 = (1,1,1)^\top$.

2. (**8 punti**) Dato il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_3(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_3(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_3(t) + u_3(t) \end{aligned}$$

con

$$0 \le u_i(t) \le 1, \qquad i = 1,2,3 \tag{1}$$

- (**2 punti**) scrivere il problema di controllo ottimo che consente di trasferire lo stato iniziale $x(0) = (1,1,1)^\top$ nello stato finale $x(T) = (0,0,0)^\top$ nel minor tempo T possibile;
- (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità per il problema considerato;
- (**3 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo, anziché soddisfare i vincoli (1), deve soddisfare il vincolo integrale

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{3} u_i(t)^2 \right) dt = 1.$$

3. (**8 punti**) Si consideri il problema multiobiettivo seguente

$$\begin{aligned} &\min \; (x-2)^2 + (y-2)^2; (x+1)^2 + (y+1)^2 \\ &s.t. \; 0 \le x \le 1 \\ &\quad\;\; 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

- Aiutandosi con una rappresentazione grafica del problema, determinare il vettore ideale degli obiettivi z_{id}.
- Dire, motivando la risposta, se il punto $(x,y) = (0.5, 0.5)$ è un punto di KKT del problema multiobiettivo.
- Dato l'insieme di punti (nello spazio degli obiettivi)

$$\bar{X} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

determinare l'insieme dei punti non dominati secondo Pareto.

4. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$\begin{aligned} &\min \; x^3 \\ &s.t. \; -1 \le x \le 1. \end{aligned}$$

- Determinare, se esistono, i moltiplicatori di KKT (λ_1^* e λ_2^*) associati alla soluzione ottima $x^* = -1$.
- Scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata $L_a(x, \lambda_1, \lambda_2; \epsilon)$ associata al problema.
- Calcolare il valore della funzione L_a quando $x = -1/2$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\epsilon = 1$.
- Calcolare $\nabla_x L_a$ quando $x = -1/2$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\epsilon = 1$.

Sia $X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ ordinato in modo tale che

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1}).$$

Iterazione k del metodo di Nelder&Mead

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$