Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2016-17 – 25 Luglio 2017

prova d'esame

1. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$\begin{aligned} &\max\ x^2 + 3xy \\ &s.t.\ x \geq 1 \\ &\qquad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

- Scrivere l'espressione di una funzione di penalità esterna $P(x, y, \epsilon)$ associata al problema. Per $\epsilon = 1$, calcolare $P(x, y, 1)$ in corrispondenza dei punti $(0,\ 1)^\top$ e $(0,\ 2)^\top$.
- Scrivere l'espressione di $\nabla P(x, y, \epsilon)$.
- Scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata $L_a(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \epsilon)$ associata al problema.
- Scrivere l'espressione di una funzione con barriera logaritmica $B(x, y, \rho)$ associata al problema. Per $\rho = 2$, calcolare $B(x, y, 2)$ in corrispondenza del punto $(2,\ 1/2)^\top$.

2. (**8 punti**) Si consideri il problema multiobiettivo seguente

$$\begin{aligned} &\max\ x;\ y \\ &s.t.\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ &\qquad (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ &\qquad y \geq 0. \end{aligned}$$

- Aiutandosi con una rappresentazione grafica del problema, determinare il vettore ideale degli obiettivi z_{id}.
- Dire, motivando la risposta, se il punto $(x, y) = (1, 0)^\top$ è un punto di KKT del problema multiobiettivo.
- Scrivere il problema che si ottiene con il metodo degli ϵ-vincoli ed in cui si massimizza la seconda funzione obiettivo. Per tale problema (singolo obiettivo), determinare un valore del parametro ϵ che consenta di ottenere una soluzione distinta dal punto $(1/2,\ \sqrt{3}/2)^\top$.

3. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y}\ f(x, y)$, ove $f(x, y) = x^2 - x - y + y^2$.

- Dati il punto $x = (3, 3)^\top$ e la direzione $d = (-1,\ -1)^\top$, determinare per quale $\alpha \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ si ottiene il miglior valore $f(x(\alpha))$ essendo $x(\alpha) = x + \alpha d$.
- Sia

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

una base positiva di $\mathbb{R}^2$, $x_0 = (3,\ 3)^\top$ e $\Delta_0 = 1$. Calcolare i punti di tentativo $x = x_0 + \Delta_0 d$, per ogni $d \in D$ ed i rispettivi valori di funzione obiettivo. Esiste tra questi, un punto che migliora strettamente la funzione obiettivo rispetto al valore $f(x_0)$? Se sì, quale?

4. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$\begin{aligned} &\min\ J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{3} u_i(t)^2 \right) dt \\ &\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) \\ &\dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t) \\ &\dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + u_3(t) \\ &x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \\ &x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = 0 \end{aligned}$$

- (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimo per il problema;
- (**3 punti**) scrivere il problema di ottimizzazione nonlineare che si ottiene con una discretizzazione rispetto al tempo con $\Delta T = T/1000$, determinandone le dimensioni (numero di variabili e di vincoli);
- (**2 punti**) assumendo ora che T sia libero, dire se può risultare

$$\sum_{i=1}^{3} u_i(T) = 1$$

motivando la risposta.