Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2016-17 – 30 Gennaio 2018

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo con T fissato:

$$\begin{aligned} \min \int_0^T & \left(x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + u_1(t)^2 + u_1(t)u_2(t) + u_2(t)^2\right) dt \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u_3(t) \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 1. \end{aligned}$$

   - (**2 punti**) Dire, motivando la risposta, se è possibile ottenere il controllo ottimo mediante una controreazione dallo stato;
   - (**2 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;
   - (**2 punti**) scrivere l'ulteriore condizione necessaria che si otterrebbe se il tempo finale T fosse libero;
   - (**2 punti**) nel caso T fissato, dire come cambiano le condizioni di ottimalità se deve risultare $\int_0^T u_3(t)^2 dt = 1$.

2. (**8 punti**) Si consideri il seguente problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2^2,\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ &s.t.\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1. \end{aligned} \tag{MOP}$$

   - Nel punto $(1,\ 1)^\top$, dire, motivando la risposta, se il vettore $(1,\ -3/2)^\top$ è una direzione di discesa per le funzioni obiettivo.
   - Nel punto $(0,\ 1)^\top$, dire, motivando la risposta, se il vettore $(1,\ -3/2)^\top$ è una direzione ammissibile per il problema.

3. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$\begin{aligned} &\min\ y + x \\ &s.t.\ y - x^4 \leq 0 \\ &\qquad y \geq 0, x \geq 0. \end{aligned}$$

   - Stabilire, motivando la risposta, se il punto $(0,\ 0)^\top$ è regolare per i vincoli.
   - Stabilire, motivando la risposta, se il punto $(0,\ 0)^\top$ è un punto di Fritz-John.
   - Determinare se il problema ammette punti di KKT distinti dal punto $(0,\ 0)^\top$.

4. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y}\ f(x,y)$, ove $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - y$ ed il metodo senza derivate riportato in fig. 1.

   - Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 1$, $x_0 = (3,\ 3)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

INPUT: x_0, $\tilde{\Delta}_0$, $D = \{e_1\} = \{d_1\}$
$k \leftarrow 0$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**

  if $f(x_k + \tilde{\Delta}_k d_1) \leq f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**

   $p_k \leftarrow d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (1) è soddisfatta

  elseif $f(x_k - \tilde{\Delta}_k d_1) \leq f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**

   $p_k \leftarrow -d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (1) è soddisfatta

  else $\Delta_k \leftarrow 0$, $p_k \leftarrow d_1$, $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \tilde{\Delta}_k / 2$

  $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k p_k$

end for

j più piccolo intero non negativo tale che:

$$\begin{array}{lcl} f(x_k + 2^j \tilde{\Delta}_k p_k) & \leq & f(x_k) - \gamma(2^j \tilde{\Delta}_k)^2 \\ f(x_k + 2^{j+1} \tilde{\Delta}_k p_k) & > & f(x_k) - \gamma(2^{j+1} \tilde{\Delta}_k)^2 \end{array} \tag{1}$$

Figure 1: Metodo per l'esercizio 4