Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2016-17 – 21 Febbraio 2018

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo con T finale fissato:

$$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i(T))^2 \\ &\dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ &\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_3(t) \\ &\dot{x}_3(t) = x_2(t) + x_3(t) + u(t) \\ &x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \\ &-1 \le u(t) \le 1, \qquad t \in [0, T] \end{aligned}$$

- (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;
- (**2 punti**) dire, motivando la risposta, se il controllo ottimo può assumere, in qualche istante $t \in [0, T]$, il valore $u(t) = 0.5$;
- (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalitá se il vincolo sul controllo diviene:

$$\int_0^T (u(t))^2 dt = 1;$$

- (**1 punto**) per il problema originale, scrivere l'ulteriore condizione che deve valere se il tempo finale T è libero, utilizzando solo variabili di stato e di controllo.

2. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y}\ f(x, y)$, ove $f(x, y) = (1 - x)^2 + (y - x)^2$ ed il metodo senza derivate riportato in fig. 1. Determinare X_{k+1} quando

$$X_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -0.7 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$\begin{aligned} &\min\ y \\ &s.t.\ x^2 + y^2 \le 1 \\ &\qquad (x - 1)^2 + y^2 \le 1. \end{aligned}$$

- Determinare tutti i punti di KKT del problema.
- Nel punto $(1,\ 0)^\top$ determinare una direzione ammissibile e di discesa.

4. (**8 punti**) Si consideri il seguente problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} &\min\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2,\ -y \\ &s.t. \qquad y - x \le 0 \\ &\qquad 0 \le y + x \le 2. \end{aligned} \tag{MOP}$$

- Aiutandosi con una rappresentazione grafica, determinare il vettore ideale degli obiettivi z^{id}.
- Stabilire, motivando la risposta, se il punto $(1,\ 1)^\top$ è un punto di KKT del problema.
- Nel punto $(1,\ 0)^\top$, determinare (motivando la risposta) una direzione che sia di discesa per entrambe le funzioni obiettivo.

- Se $\boxed{f_1 \le f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \le f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \le f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \le f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Figure 1: k-esima iterazione del metodo di Nelder&Mead per l'esercizio 2