Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2016-17 – 17 Aprile 2018

prova d'esame (A)

1. (**8 punti**) Dato il sistema dinamico:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_3(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_3(t) + u_2(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u_3(t)\end{aligned}$$

con

$$-1 \le u_i(t) \le 1, \qquad i = 1, 2$$

- (**2 punti**) scrivere il problema di controllo ottimo a tempo finale libero che consente di trasferire lo stato iniziale $x(0) = (1,\ 1,\ 1)^\top$ nello stato finale $x(T) = (0,\ 0,\ 0)^\top$ minimizzando la norma quadratica del controllo nell'intervallo $[0, T]$;
- (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità per il problema considerato;
- (**3 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se, invece di raggiungere lo stato finale $x(T) = (0,\ 0,\ 0)^\top$, ci si accontenta di minimizzare la norma quadratica.

2. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\ f(x)$, con $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continuamente differenziabile. Supponiamo inoltre che il problema ammetta soluzione globale x^* (i.e. $f(x^*) \le f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$). Si consideri il metodo di ottimizzazione che non usa derivate riportato in figura 1.

Determinare, motivando opportunamente la risposta, quante iterazioni impiega al più il metodo, quando $x_0 = x^*$, $\Delta_0 = 1$, $\Delta_{min} = 10^{-6}$, e maxit$= +\infty$.

```
INPUT: x_0, Δ_0, Δ_min, maxit, D = {±e_i, i = 1,...,n}
k ← 0, x ← x_0, Δ ← Δ_0
while k ≤maxit and Δ ≥ Δ_min do
    k ← k + 1
    Let d̄ ∈ D be s.t. f(x + Δd̄) = min_{d_i∈D} f(x + Δd_i)
    if f(x + Δd̄) < f(x) then
      x ← x + Δd̄
    else
      Δ ← Δ/2
    endif
end while
```

Figure 1: Metodo di ottimizzazione per l'esercizio 2

3. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$\begin{aligned}&\min\ y - x^2\\ &s.t.\ 3x^2 + y^2 = 4\\ &\quad -x \le y \le x.\end{aligned}$$

- Determinare tutti i punti di KKT del problema.
- Dire, motivando la risposta, se uno dei punti di KKT trovati fornisce una soluzione globale del problema.

4. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi:

$$\begin{aligned}&\min\ x_1,\ -x_2\\ &s.t.\ x_2 - x_1^2 \le 0,\\ &\quad x_2 \ge 0,\ 0 \le x_1 \le 1.\end{aligned} \tag{MOP}$$

- Determinare, per via grafica, il vettore ideale degli obiettivi z^{id} e le soluzioni ammissibili che lo determinano.
- Determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dai Punti $(0,\ 0)^\top$ e $(1,\ 1)^\top$ utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2016-17 – 17 Aprile 2018

prova d'esame (B)

1. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; f(x)$, con $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continuamente differenziabile. Supponiamo inoltre che il problema ammetta soluzione globale x^* (i.e. $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$). Si consideri il metodo di ottimizzazione che non usa derivate riportato in figura 2.

   Determinare, motivando opportunamente la risposta, quante iterazioni impiega al più il metodo, quando $x_0 = x^*$, $\Delta_0 = 10$, $\Delta_{min} = 10^{-6}$, e `maxit`$= +\infty$.

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$
$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$
while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**
    $k \leftarrow k + 1$
    if $\exists\ \bar{d} \in D$ tale che $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**
        $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$
    else
        $\Delta \leftarrow \Delta/2$
    endif
end while

Figure 2: Metodo di ottimizzazione per l'esercizio 1

2. (**8 punti**) Dato il sistema dinamico:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + x_3(t) + u_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_3(t) + u_2(t)\\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u_3(t)
\end{aligned}$$

   con

$$-1 \leq u_i(t) \leq 1, \qquad i = 1, 2$$

   - (**2 punti**) scrivere il problema di controllo ottimo a tempo finale libero che consente di trasferire lo stato iniziale $x(0) = (1,\ 1,\ 1)^\top$ nello stato finale $x(T) = (0,\ 0,\ 0)^\top$ minimizzando la norma quadratica del controllo nell'intervallo $[0, T]$;
   - (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità per il problema considerato;
   - (**3 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se, invece di raggiungere lo stato finale $x(T) = (0,\ 0,\ 0)^\top$, ci si accontenta di minimizzare la norma quadratica.

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi:

$$\begin{aligned}
&\min\ x_1,\ -x_2\\
&s.t.\ x_2 - x_1^2 \geq 0,\\
&\qquad 0 \leq x_2 \leq 1.
\end{aligned} \tag{MOP}$$

   - Determinare, per via grafica, il vettore ideale degli obiettivi z^{id} e le soluzioni ammissibili che lo determinano.
   - Determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dai Punti $(0,\ 0)^\top$ e $(1,\ 1)^\top$ utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

4. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente

$$\begin{aligned}
&\min\ y - x^2\\
&s.t.\ x^2 + 2y^2 = 3\\
&\qquad -x \leq y \leq x.
\end{aligned}$$

   - Determinare tutti i punti di KKT del problema.
   - Dire, motivando la risposta, se uno dei punti di KKT trovati fornisce una soluzione globale del problema.