# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

## A.A. 2017-18 – 24 Luglio 2018

prova d'esame

1. (**8 punti**) Sia dato il problema non vincolato $\min_{x,y} f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - y$ e l'insieme di direzioni

$$D_\oplus = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sia, inoltre, $\bar{x} = (0,\ 0)^\top$.

- Calcolare il gradiente di $f$ in $\bar{x}$ e determinare una direzione $\bar{d} \in D_\oplus$ tale che:

$$\bar{d}^\top \nabla f(\bar{x}) \leq \min_{d \in D_\oplus} d^\top \nabla f(\bar{x}).$$

- Dato $\Delta_0 = 1$, determinare un punto $\tilde{x} = \bar{x} + \Delta_0 d$ con $d \in D_\oplus$ tale che:

$$f(\tilde{x}) \leq \min_{d \in D_\oplus} f(\bar{x} + \Delta_0 d)$$

2. (**8 punti**) Dato il seguente problema di controllo ottimo, con $T$ fissato:

$$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_2(t)x_3(t) + x_3(t)^2 + e^{-t}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2)\right) dt \\ &\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) \\ &\dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t) \\ &\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ &x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned}$$

- (**2 punti**) determinate le matrici $A, B, Q, R$ del problema, scrivere in forma matriciale le condizioni necessarie di ottimo date dal principio del massimo;
- (**1 punto**) scrivere l'equazione di Riccati che consente di ottenere il controllo ottimo come controreazione dallo stato;
- (**1 punto**) scrivere l'espressione del controllo ottimo come controreazione dallo stato;
- (**1 punto**) dire a quante equazioni differenziali indipendenti dà luogo l'equazione di Riccati;
- (**1 punto**) dire se, nel caso in cui $T \to \infty$, l'equazione di Riccati diventa un'equazione algebrica;
- (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni necessarie di ottimo se deve risultare:

$$u_1(t) \geq 0,\ u_2(t) \geq 0.$$

3. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$\begin{aligned} &\min\ -\sin(x) \\ &s.t.\ x(x - \pi) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- dire, motivando analiticamente la risposta, se il problema è convesso;
- determinare i punti che soddisfano le condizioni di KKT.

4. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$\begin{aligned} &\min\ -x;\ y \\ &s.t.\ x - y^3 \leq 0 \\ &\quad x \geq 0 \\ &\quad y \leq 1 \end{aligned}$$

- aiutandosi con una rappresentazione grafica, determinare il vettore ideale $z^{id}$ degli obiettivi e le soluzioni ammissibili $x_1^{id}$ e $x_2^{id}$ che lo determinano;
- determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dalle soluzioni $x_1^{id}$ e $x_2^{id}$ utilizzando il metodo degli $\epsilon$-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.