Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2017-18 – 13 Settembre 2018

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il seguente problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$\begin{aligned}
\min \ & \frac{1}{2}\left(x_1(T)^2 + x_2(T)^2\right) \\
& \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) \\
& \dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_3(t) + u_2(t) \\
& \dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_3(t) \\
& x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1, \ x_3(T) = 0
\end{aligned}$$

   - (**3 punti**) scrivere le condizioni necessarie di ottimalità;
   - (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo risulta vincolato come segue:

$$-1 \leq u_1(t) \leq 1, \ -1 \leq u_2(t) \leq 1;$$

   - (**3 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo risulta vincolato come segue:

$$\int_0^T u_1(t)^2 dt = 1, \quad \int_0^T u_2(t)^2 dt = 1.$$

2. (**8 punti**) Si consideri il seguente problema vincolato

$$\begin{aligned}
\min \ & x + y \\
s.t. \ & (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\
& (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 4.
\end{aligned}$$

   - Rappresentare sul piano cartesiano la regione ammissibile del problema e determinare graficamente la sua soluzione globale.
   - Stabilire se il problema è un problema convesso.
   - Determinare tutti i punti di KKT del problema.
   - Dire, motivando la risposta, se uno dei punti di KKT trovati è anche una soluzione globale del problema.

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$\begin{aligned}
\min \ & x; -y \\
s.t. \ & (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\
& (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 4 \\
& x \leq 2
\end{aligned}$$

   - aiutandosi con una rappresentazione grafica, determinare il vettore ideale z^{id} degli obiettivi e le soluzioni ammissibili x_1^{id} e x_2^{id} che lo determinano;
   - determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dalle soluzioni x_1^{id} e x_2^{id} utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

4. (**8 punti**) Dato il problema vincolato

$$\begin{aligned}
\min \ & x + y \\
s.t. \ & x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0
\end{aligned}$$

   - Determinare nel punto $(-2, \ 0)^\top$ il cono delle direzioni ammissibili.
   - Determinare nel punto $(-2, \ 0)^\top$ il cono delle direzioni di discesa.
   - Stabilire, motivando analiticamente la risposta, se il punto $(-2, \ 0)^\top$ è un punto stazionario per il problema.