Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2017-18 – 19 Ottobre 2018

prova d'esame

1. (**8 punti**) Il problema di controllo ottimo a tempo discreto

$$
\begin{aligned}
&\min\ J = \frac{1}{2}x_1(1000)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{999}[x_1(k)^2 + x_2(k)^2 + u_1(k)^2 + u_2(k)^2] \\
&x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + u_1(k) \\
&x_2(k+1) = x_1(k) + x_3(k) + u_2(k) \qquad\qquad k = 0, \dots, 999 \\
&x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + u_3(k) \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1,\ x_2(1000) = x_3(1000) = 0 \\
&-1 \leq u_1(k) \leq 1
\end{aligned}
$$

deriva dalla discretizzazione di un problema a tempo continuo con T fissato, $N = T/\Delta T = 1000$, $\Delta T = 1$.

- (**3 punti**) Determinare il problema di controllo ottimo a tempo continuo che ha dato luogo alla discretizzazione.
- (**3 punti**) Scrivere le condizioni di ottimalità del problema a tempo continuo.
- (**2 punti**) Scrivere tutti i motivi per cui il controllo ottimo del problema a tempo continuo non può essere ottenuto a controreazione.

2. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$
\begin{aligned}
&\min\ x_1 - x_2 \\
&s.t.\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\
&\quad\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 4
\end{aligned}
$$

- Rappresentare sul piano cartesiano la regione ammissibile del problema.
- Motivare l'esistenza di una soluzione globale e determinarla per via grafica.
- Studiare la regolarità dei punti ammissibili.
- Determinare tutti i punti di KKT del problema.

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$
\begin{aligned}
&\min\ x_1 + x_2;\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\
&s.t.\ (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 4 \\
&\quad\ x_1 \leq 2,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- aiutandosi con una rappresentazione grafica, determinare il vettore ideale z^{id} degli obiettivi e le soluzioni ammissibili x_1^{id} e x_2^{id} che lo determinano;
- determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dalle soluzioni x_1^{id} e x_2^{id} utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli stabilendo un valore di ϵ e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

4. (**8 punti**) Dato il problema vincolato

$$
\begin{aligned}
&\min\ sin(x + y) \\
&s.t.\ x^2 + y^2 \leq 9, \\
&\quad\ x - y = 1
\end{aligned}
$$

- Mediante aggiunta di variabili slack trasformare il problema in uno con soli vincoli di uguaglianza.
- Per il problema ottenuto al punto precedente, scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata e del suo gradiente.