Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2017-18 – 30 Gennaio 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}(x_3(T))^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + u_1(t)^2 + u_1(t)u_2(t) + u_2(t)^2\right) dt \\
& \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) \\
& \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t) \\
& \dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u_3(t) \\
& x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \\
& x_2(T) = 0
\end{aligned}
$$

   (a) (**3 punti**) scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;

   (b) (**3 punti**) elencare tutti i motivi per cui non è possibile ottenere il controllo ottimo mediante una controreazione dallo stato;

   (c) (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni di ottimalità se deve risultare:

$$\int_0^T u_1(t)^2 dt = \int_0^T u_2(t)^2 dt.$$

2. (**8 punti**) Dato il problema

$$
\begin{aligned}
\min\ & x - y \\
s.t.\ & y - (x-2)^3 = 0 \quad (\lambda_1) \\
& y \geq 0 \quad (\lambda_2)
\end{aligned}
$$

   (a) (**2 punti**) Rappresentare graficamente la regione ammissibile ed almeno due curve di livello della funzione obiettivo.

   (b) (**4 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di Fritz-John del problema.

   (c) (**2 punti**) Scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata e del suo gradiente rispetto alle variabili primali (x, y) e duali (λ_1, λ_2).

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$
\begin{aligned}
\max\ & x;\ y \\
s.t.\ & (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \\
& (x-s)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\
& x - 2 \geq 0
\end{aligned}
$$

   (a) (**4 punti**) aiutandosi con una rappresentazione grafica, determinare il vettore ideale z^{id} degli obiettivi e le soluzioni ammissibili x_1^{id} e x_2^{id} che lo determinano;

   (b) (**4 punti**) determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dalle soluzioni x_1^{id} e x_2^{id} utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli stabilendo un valore di ϵ e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

4. (**8 punti**) Sia dato il problema non vincolato $\min_{x,y} f(x,y) = x^2 - x + 2y^2 - 2y$ e l'insieme di direzioni

$$D_\oplus = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Sia, inoltre, $\bar{x} = (0,\ 0)^\top$.

   (a) (**4 punti**) Calcolare il gradiente di f in $\bar{x}$ e determinare una direzione $\bar{d} \in D_\oplus$ tale che:

$$\bar{d}^\top \nabla f(\bar{x}) \leq \min_{d \in D_\oplus} d^\top \nabla f(\bar{x}).$$

   (b) (**4 punti**) Dato $\Delta_0 = 1$, determinare un punto $\tilde{x} = \bar{x} + \Delta_0 d$ con $d \in D_\oplus$ tale che:

$$f(\tilde{x}) \leq \min_{d \in D_\oplus} f(\bar{x} + \Delta_0 d)$$