Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2017-18 – 19 Febbraio 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo a tempo continuo, con T fissato:

$$\begin{aligned}
&\min\ \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 + u(t)^2\right) dt\\
&\dot{x}_1(t) = x_2(t)\\
&\dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_3(t)\\
&\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + cos(u(t))\\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0\\
&x_1(T) = x_2(T) = 1\\
&-\pi/2 \le u(t) \le \pi/2
\end{aligned}$$

   (a) (**3 punti**) scrivere le condizioni necessarie di ottimalità;

   (b) (**2 punti**) dire se deve valere la condizione

$$\lambda_1(T) + \lambda_2(T)(1 + x_3(T)) - \left(1 + \frac{x_3(T)^2 + u(T)^2}{2}\right) = 0$$

   motivando la risposta;

   (c) (**3 punti**) scrivere il problema di ottimizzazione nonlineare che si ottiene con una discretizzazione rispetto al tempo con $\Delta T = T/1000$, determinandone le dimensioni (numero di variabili e di vincoli).

2. (**8 punti**) Dato il problema

$$\begin{aligned}
&\min\ x\\
&s.t.\ x^2 + y^2 \ge 1\\
&\quad -1 \le y \le 1\\
&\quad x \ge 0
\end{aligned}$$

   (a) (**2 punti**) Rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema ed almeno due curve di livello della funzione obiettivo.

   (b) (**4 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di KKT del problema con i rispettivi moltiplicatori.

   (c) (**2 punti**) Stabilire, motivando la risposta, se esistono punti NON regolari. In caso affermativo, determinarli tutti.

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$\begin{aligned}
&\min\ x + y;\ (x-3)^2 + (y-3)^2\\
&s.t.\ x^2 + y^2 \ge 1\\
&\quad 0 \le x \le 2\\
&\quad 0 \le y \le 2
\end{aligned}$$

   (a) (**4 punti**) satibilire, motivando analiticamente la risposta, se nel punto $(1,\ 2)^\top$ esistono direzioni che sia contemporaneamente di discesa per entrambe le funzioni obiettivo;

   (b) (**4 punti**) Determinare almeno DUE punti di KKT (con rispettivi moltiplicatori) per i quali $I_0 = \emptyset$ ed il moltiplicatore associato alla seconda f.ob. sia esattamente pari ad 1.

4. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$\begin{aligned}
&\min\ x^2 + (y+3)^2\\
&s.t.\ x^2 + y^2 \ge 1\\
&\quad x \ge 0
\end{aligned}$$

   (a) (**4 punti**) Scrivere l'espressione di un funzione di Penalità sequenziale $P(x, y; \epsilon)$ e delle sue derivate rispetto alle variabili del problema.

   (b) (**4 punti**) Scrive l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata $L_a(x, y, \lambda_1, \lambda_2; \epsilon)$ e le formule di aggiornamento dei moltiplicatori utilizzate nell'algoritmo di soluzione del problema basato sull'uso della funzione L_a.