Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2018-19 – 23 Luglio 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il seguente problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \frac{1}{2}\int_0^T \Big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_2(t)x_3(t) + x_3(t)^2 + e^{-t}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2) + u_3(t)^2\Big)dt\\
&\dot{x}_1\ (t) = x_2(t) + u_1(t)\\
&\dot{x}_2\ (t) = x_3(t) + u_2(t)\\
&\dot{x}_3\ (t) = -x_1(t) - x_2(t) + u_3(t)\\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1
\end{aligned}
$$

- (**2 punti**) scrivere in forma matriciale le condizioni necessarie di ottimo date dal principio del massimo;
- (**1 punto**) scrivere l'equazione di Riccati che consente di ottenere il costato in funzione dello stato;
- (**1 punto**) scrivere l'espressione del controllo ottimo come controreazione dallo stato;
- (**1 punto**) dire a quante equazioni differenziali indipendenti dà luogo l'equazione di Riccati;
- (**1 punto**) dire se, nel caso in cui $T \to \infty$, l'equazione differenziale di Riccati diventa un'equazione algebrica;
- (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni necessarie di ottimo se deve risultare:

$$u_1(t) \geq 0.$$

2. (**8 punti**) Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x) = (x_2 - x_1^2) + e^{x_1}$.

- (**2 punti**) Dati $\bar{x}_0 = (0,\ 1)^\top$ e $d = (1,\ -2)^\top$, scrivere l'espressione $\phi(\alpha)$ della funzione f calcolata nel punto parametrico $x(\alpha) = \bar{x}_0 + \alpha d$.
- (**3 punti**) Fissato $\gamma = 0.1$, determinare il più piccolo intero $j^* \in \{0, 1, 2, \dots\}$, tale che:

$$
\begin{array}{rcl}
\phi(2^{j^*}) & \leq & \phi(0) - \gamma(2^{j^*})^2\\
\phi(2^{j^*+1}) & > & \phi(0) - \gamma(2^{j^*+1})^2.
\end{array}
$$

- (**3 punti**) Dal punto $x_0 = x(2^{j^*}) = \bar{x}_0 + 2^{j^*}d$ e con $\Delta_0 = 1$, eseguire una iterazione del metodo riportato in Fig. 1

3. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$
\begin{aligned}
&\max\ x + y\\
&s.t.\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\\
&\quad\ \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\\
&\quad\ \ x - y \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- (**3 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di KKT (e relativi moltiplicatori) del problema che soddisfano la condizione $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
- (**3 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di KKT (e relativi moltiplicatori) del problema che soddisfano la condizione $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.
- (**2 punti**) Stabilire, motivando analiticamente la risposta, se possono esistere punti di KKT che NON siano sulla frontiera della regione ammissibile.

4. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$
\begin{aligned}
&\min\ x;\ y\\
&s.t.\ x^2 + y^2 \leq 1
\end{aligned}
$$

- (**2 punti**) rappresentare graficamente la regione ammissibile del problema e determinare il vettore ideale z^{id} degli obiettivi e le soluzioni ammissibili x_1^{id} e x_2^{id} che lo determinano;
- (**3 punti**) determinare almeno una soluzione (distinta dai punti x_1^{id} e x_2^{id}) utilizzando il metodo dei pesi (scegliendo arbitrariamente i pesi per le due funzioni obiettivo) e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.
- (**3 punti**) stabilire, motivando analiticamente la risposta, se nel punto $(0,\ 0)^\top$ esiste una direzione che sia di discesa per entrambe le funzioni obiettivo; se si, determinarne almeno una.

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$

Let $\bar{d} \in D$ t.c. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x_k + \Delta_k d_i)$

if $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k)$ **then**

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

else

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k / 2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

endif

$k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Figure 1: Metodo "compass search" per Esercizio 2