Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Mercoledì 18 Marzo 2020

[1]Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Vi ricordo che ...

... abbiamo considerato il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- problema senza vincoli
- $f(x)$ continuamente differenziabile ma
- $\nabla f(x)$ non disponibile (o troppo costoso)
- ricerca di un minimo locale o punto stazionario

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

Perché se così non fosse, **non avremmo garanzia di convergenza** a punti stazionari

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Supponiamo che un metodo "compass search" parta dal punto $x_0 = -1$ con passo $\Delta_0 = 1$ e sia $D = \{+1, -1\}$

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

k	x_k	$f(x_k)$	Δ_k
0	-1	4	1
1	-1	4	0.5
2	-0.5	2.25	0.5
3	-0.5	2.25	0.25
4	-0.25	1.5625	0.25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2h$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h}
$2h+1$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Come si vede, quando $k \to \infty$, $x_k \to 0$ che è il punto di discontinuità ma **non stazionario**

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

k	x_k	$f(x_k)$	Δ_k
0	-1	4	1
1	-1	4	0.5
2	-0.5	2.25	0.5
3	-0.5	2.25	0.25
4	-0.25	1.5625	0.25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2h$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h}
$2h+1$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Come si vede, quando $k \to \infty$, $x_k \to 0$ che è il punto di discontinuità ma **non stazionario**

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

k	x_k	$f(x_k)$	Δ_k
0	-1	4	1
1	-1	4	0.5
2	-0.5	2.25	0.5
3	-0.5	2.25	0.25
4	-0.25	1.5625	0.25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2h$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h}
$2h+1$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Come si vede, quando $k \to \infty$, $x_k \to 0$ che è il punto di discontinuità ma **non stazionario**

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

k	x_k	$f(x_k)$	Δ_k
0	-1	4	1
1	-1	4	0.5
2	-0.5	2.25	0.5
3	-0.5	2.25	0.25
4	-0.25	1.5625	0.25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2h$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h}
$2h+1$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Come si vede, quando $k \to \infty$, $x_k \to 0$ che è il punto di discontinuità ma **non stazionario**

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

k	x_k	$f(x_k)$	Δ_k
0	-1	4	1
1	-1	4	0.5
2	-0.5	2.25	0.5
3	-0.5	2.25	0.25
4	-0.25	1.5625	0.25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2h$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h}
$2h+1$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

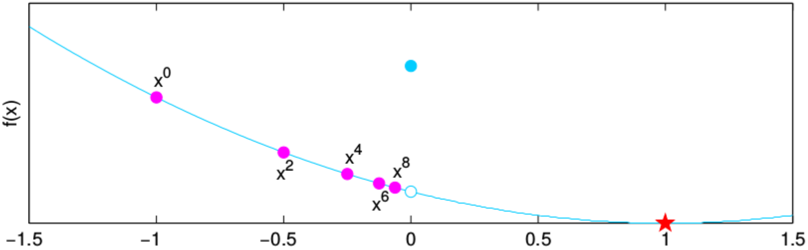
Come si vede, quando $k \to \infty$, $x_k \to 0$ che è il punto di discontinuità ma **non stazionario**

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?

k	x_k	$f(x_k)$	Δ_k
0	-1	4	1
1	-1	4	0.5
2	-0.5	2.25	0.5
3	-0.5	2.25	0.25
4	-0.25	1.5625	0.25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2h$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h}
$2h+1$	-2^{-h}	$(2^{-h}+1)^2$	2^{-h-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Come si vede, quando $k \to \infty$, $x_k \to 0$ che è il punto di discontinuità ma **non stazionario**

Perché assumiamo che $f(x)$ sia continua?



Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?

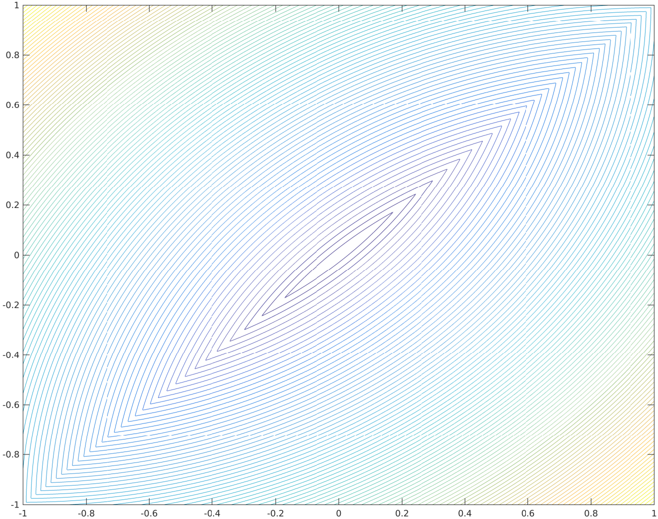
Perché se così non fosse, **non avremmo garanzia di convergenza** a punti stazionari

Esempio:

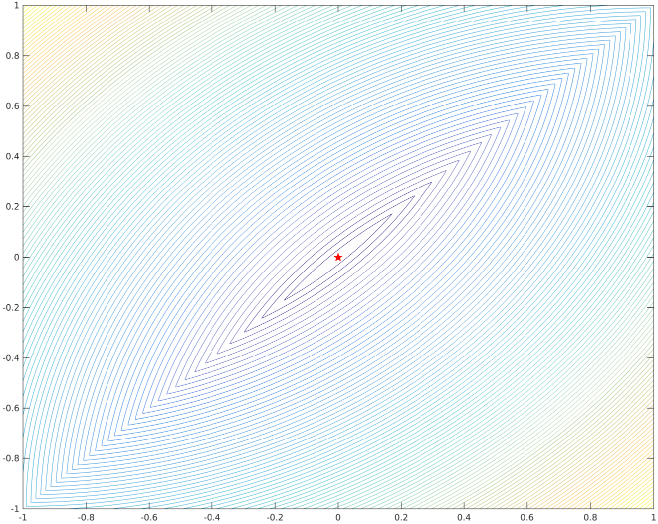
$$f(x) = \max\left\{\|x - c_1\|^2, \|x - c_2\|^2\right\}$$

con $c_1 = (1,\ -1)^\top$ e $c_2 = -c_1$

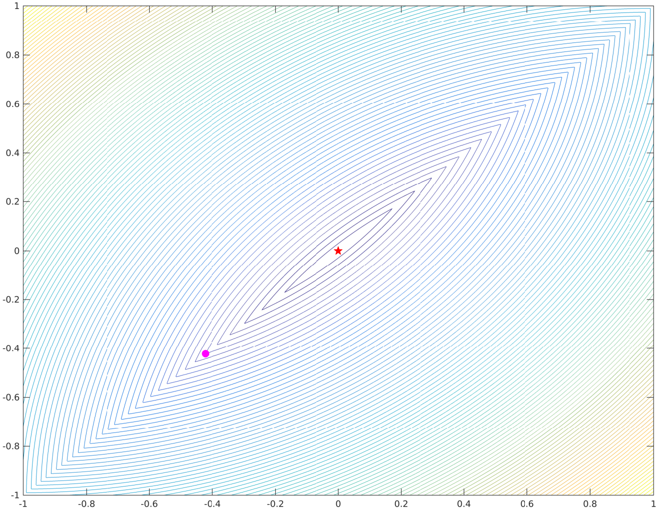
Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



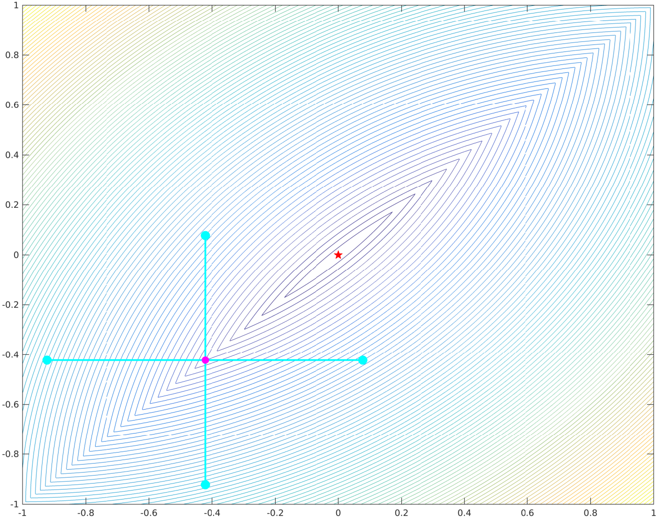
Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



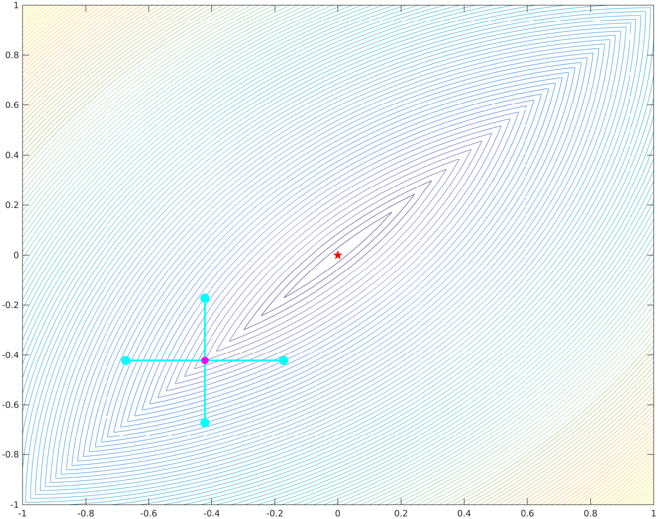
Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



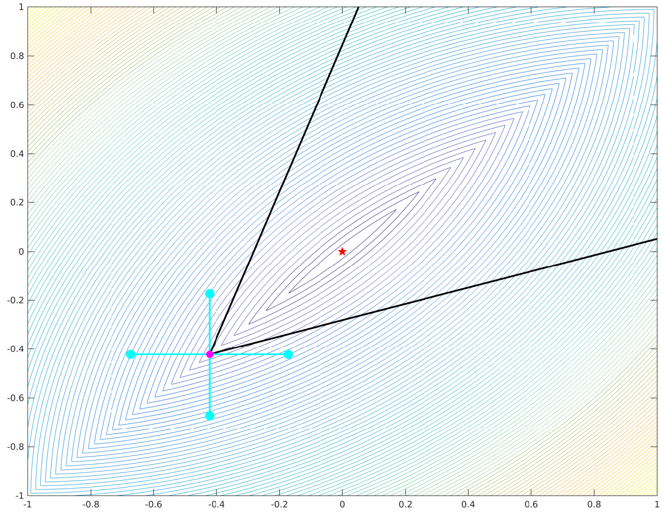
Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



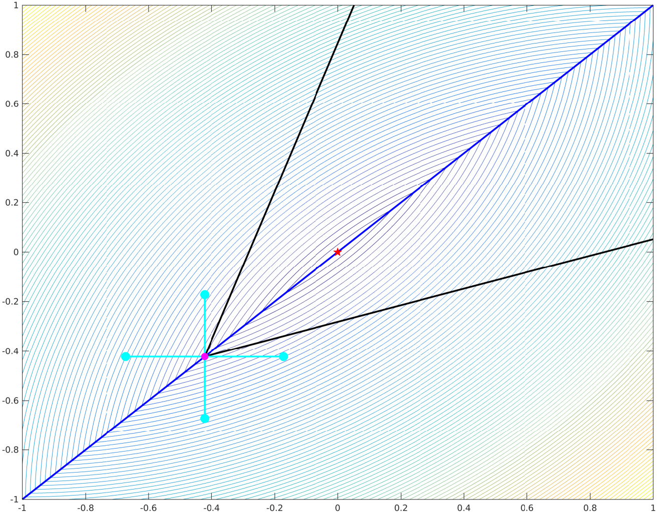
Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



Perché assumiamo che $\nabla f(x)$ sia continuo?



Situazioni più complesse

- presenza di vincoli
  - "facili" (limitazioni sulle var.)
  - "difficili" ($g(x) \leq 0$, nonlineari generali)
- $f(x)$ e/o $g(x)$ continue ma non differenziabili
- presenza di più funzioni obiettivo
- presenza di variabili "discrete"
- ricerca di un minimo globale

DFL (Derivative-Free Library), download gratuito di metodi che non usano derivate prime

http://www.iasi.cnr.it/∼liuzzi/DFL

Situazioni più complesse

- presenza di vincoli
  - "facili" (limitazioni sulle var.)
  - "difficili" ($g(x) \leq 0$, nonlineari generali)
- $f(x)$ e/o $g(x)$ continue ma non differenziabili
- presenza di più funzioni obiettivo
- presenza di variabili "discrete"
- ricerca di un minimo globale

DFL (Derivative-Free Library), download gratuito di metodi che non usano derivate prime

`http://www.iasi.cnr.it/∼liuzzi/DFL`

Approfondimenti

- **Introduction to Derivative-Free Optimization**
  A.R.Conn, K. Scheinberg, L.N. Vicente, MPS-SIAM series on Optimization (**2009**)

- **Derivative-Free and Blackbox Optimization**
  C. Audet, W. Hare, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering (**2017**)

Mercoledì 18 Marzo 2020 – II parte

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{lll} \min\limits_x & f(x) & f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ c.v & h(x) = 0 & h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\ & g(x) \leq 0 & g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \end{array} \qquad (P_0)$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{x} & f(x) & f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ c.v & h(x) = 0 & h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\ & g(x) \leq 0 & g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \end{array} \qquad (P_0)$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_x & f(x) & f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
c.v & h(x) = 0 & h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 & g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
\end{array}
\qquad (P_0)
$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_x & f(x) \\
c.v & h(x) = 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\min\limits_x & f(x) \\
c.v & g(x) \leq 0
\end{array}
$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{lll l} \min\limits_{x} & f(x) & f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} & \\ c.v & h(x)=0 & h:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p & p \leq n \\ & g(x) \leq 0 & g:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m & \end{array} \qquad (P_0)$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x)=0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Definizione di minimo

Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$ *è un punto di minimo globale* stretto *quando*

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F}, \; x \neq x^*$$

Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$ *è un punto di minimo locale* stretto *quando, esiste un* $\epsilon > 0$ *t.c.*

$$f(x^*) f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon), \; x \neq x^*$$

ove $\mathcal{B}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x - x^*\| < \epsilon\}$

Definizione di minimo

Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$ è un punto di minimo globale **stretto** *quando*

$$f(x^*) < f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F}, \; x \neq x^*$$

Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$ è un punto di minimo locale stretto *quando, esiste un $\epsilon > 0$ t.c.*

$$f(x^*) f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon), \; x \neq x^*$$

ove $\mathcal{B}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x - x^*\| < \epsilon\}$

Definizione di minimo

Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$ *è un punto di minimo globale* **stretto** *quando*

$$f(x^*) < f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F},\ x \neq x^*$$

Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$ *è un punto di minimo locale* **stretto** *quando, esiste un* $\epsilon > 0$ *t.c.*

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon),\ x \neq x^*$$

ove $\mathcal{B}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x^*\| < \epsilon\}$

Definizione di minimo

Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$ *è un punto di minimo globale* **stretto** *quando*

$$f(x^*) < f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F},\ x \neq x^*$$

Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$ *è un punto di minimo locale* **stretto** *quando, esiste un* $\epsilon > 0$ *t.c.*

$$f(x^*) < f(x), \qquad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon),\ x \neq x^*$$

ove $\mathcal{B}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x^*\| < \epsilon\}$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) + y_i^2 = 0, \ i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) = y_i, \ y_i \leq 0, \ i = 1, \dots, m \end{array}$$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & f(x)\\ c.v & h(x)=0\end{array} \qquad \begin{array}{ll}\min\limits_{x} & f(x)\\ c.v & h(x)\le 0\\ & -h(x)\le 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & f(x)\\ c.v & g(x)\le 0\end{array} \qquad \begin{array}{ll}\min\limits_{x,y} & f(x)\\ c.v & g_i(x)+y_i^2=0,\ \ i=1,\dots,m\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & f(x)\\ c.v & g(x)\le 0\end{array} \qquad \begin{array}{ll}\min\limits_{x,y} & f(x)\\ c.v & g_i(x)=y_i,\ \ y_i\le 0,\ \ i=1,\dots,m\end{array}$$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) + y_i^2 = 0, \;\; i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) = y_i, \;\; y_i \leq 0, \;\; i = 1, \dots, m \end{array}$$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) + y_i^2 = 0, \ \ i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) = y_i, \ \ y_i \leq 0, \ \ i = 1, \dots, m \end{array}$$

Condizioni di esistenza

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &s.t. \ x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

In generale, può accadere che:

- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ma $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty$ ma $\nexists\ x^* \in \mathcal{F} : f(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{F}} f(x)$
- Esiste $x^* \in \mathcal{F}$ e $f(x^*) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$

Condizioni di esistenza

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

In generale, può accadere che:

- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ma $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty$ ma $\nexists\ x^* \in \mathcal{F} : f(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{F}} f(x)$
- Esiste $x^* \in \mathcal{F}$ e $f(x^*) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$

Condizioni di esistenza

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} &\min \; f(x) \\ &s.t.\; x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

In generale, può accadere che:

- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ma $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty$ ma $\nexists\, x^* \in \mathcal{F} : f(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{F}} f(x)$
- Esiste $x^* \in \mathcal{F}$ e $f(x^*) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$

Condizioni di esistenza

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

In generale, può accadere che:

- $\mathcal{F} = \emptyset$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ma $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty$ ma $\nexists\ x^* \in \mathcal{F} : f(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{F}} f(x)$
- Esiste $x^* \in \mathcal{F}$ e $f(x^*) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$

Esempio: $\mathcal{F} = \emptyset$

Consideriamo il problema

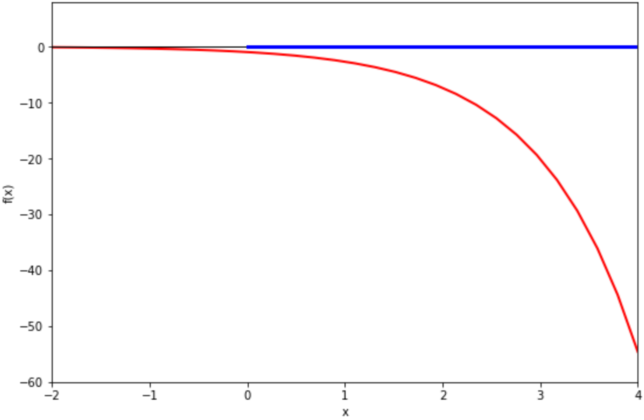
$$\begin{array}{l} \min\ -e^x \\ s.t.\ x \leq 0,\ x \geq 2 \end{array}$$

In questo caso (ovviamente), il problema non ammette soluzione perché $\mathcal{F} = \emptyset$

Esempio: $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$

Consideriamo il problema

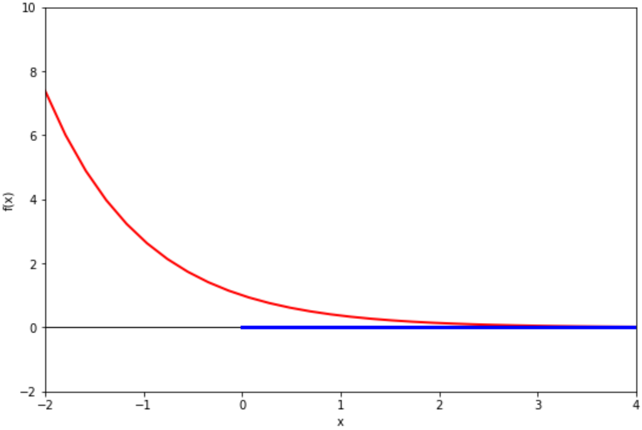
$$\begin{aligned} &\min\ -e^x \\ &s.t.\ x \geq 0 \end{aligned}$$



Esempio: $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty, \ \nexists\, x^* \in \mathcal{F}: \ f(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{F}} f(x)$

Consideriamo il problema

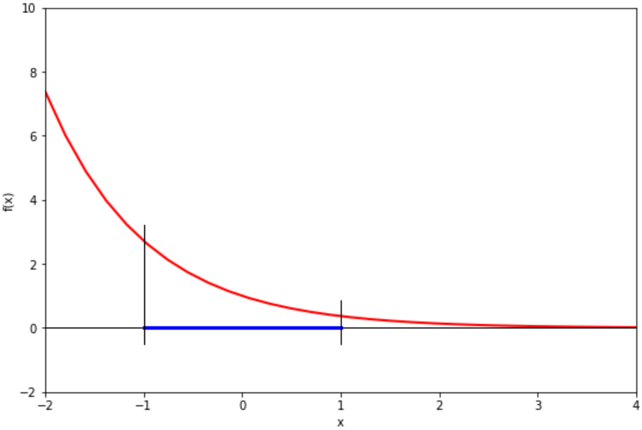
$$\begin{aligned} &\min \ e^{-x} \\ &s.t. \ x \geq 0 \end{aligned}$$



Esempio: $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty,\ \exists\ x^* \in \mathcal{F}:\ f(x^*) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & e^{-x} \\ s.t. & -1 \le x \le 1 \end{array}$$



Condizioni di esistenza

C'è un teorema fondamentale ...

Teorema (Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto non vuoto. Allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$

Condizioni di esistenza

C'è un teorema fondamentale ...

Teorema (Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto non vuoto. Allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$

Condizioni di esistenza

Proposizione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{F} \neq \emptyset$. Se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$L_{\mathcal{F}}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$$

è compatto e non vuoto, allora f ammette minimo globale su $\mathcal{F}$.

Dim. Siccome $L_{\mathcal{F}}(\alpha)$ è compato e non vuoto e f è continua, allora (Weierstrass) esiste un punto di minimo globale x^* di f su $L_{\mathcal{F}}(\alpha)$, per cui $f(x^*) \leq f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in L_{\mathcal{F}}(\alpha)$.
Ora, consideriamo un punto $x \in \mathcal{F}$ e $x \notin L_{\mathcal{F}}(\alpha)$. Ma allora, $f(x) > \alpha \geq f(x^*)$. $\square$

Condizioni di esistenza

Proposizione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{F} \neq \emptyset$. Se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$L_{\mathcal{F}}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$$

è compatto e non vuoto, allora f ammette minimo globale su $\mathcal{F}$.

Dim. Siccome $L_{\mathcal{F}}(\alpha)$ è compato e non vuoto e f è continua,allora (Weierstrass) esiste un punto di minimo globale x^* di f su $L_{\mathcal{F}}(\alpha)$, per cui $f(x^*) \leq f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in L_{\mathcal{F}}(\alpha)$.
Ora, consideriamo un punto $x \in \mathcal{F}$ e $x \notin L_{\mathcal{F}}(\alpha)$. Ma allora, $f(x) > \alpha \geq f(x^*)$. $\square$

Condizioni di esistenza

Proposizione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{F} \neq \emptyset$. Se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$L_{\mathcal{F}}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$$

è compatto e non vuoto, allora f ammette minimo globale su $\mathcal{F}$.

Dim. Siccome $L_{\mathcal{F}}(\alpha)$ è compato e non vuoto e f è continua,allora (Weierstrass) esiste un punto di minimo globale x^* di f su $L_{\mathcal{F}}(\alpha)$, per cui $f(x^*) \leq f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in L_{\mathcal{F}}(\alpha)$.
Ora, consideriamo un punto $x \in \mathcal{F}$ e $x \notin L_{\mathcal{F}}(\alpha)$. Ma allora, $f(x) > \alpha \geq f(x^*)$. $\square$

Condizioni di esistenza

Definizione (Coercività su $\mathcal{F}$)

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è coerciva su $\mathcal{F}$ quando, per ogni successione $\{x_k\}$ tale che

- $x_k \in \mathcal{F}$
- $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$

abbiamo $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Proposizione (Compattezza delle curve di livello)

Supponiamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ sia non vuoto e che $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ sia continua. Allora, tutte le curve di livello di f su $\mathcal{F}$ sono compatte se e solo se accade che:

(i) *f è coerciva su $\mathcal{F}$*

(ii) *per ogni successione $\{x_k\}$ tale che $x_k \in \mathcal{F}$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \notin \mathcal{F}$ abbiamo che $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$*

Condizioni di esistenza

Definizione (Coercività su $\mathcal{F}$)

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è coerciva su* $\mathcal{F}$ *quando, per ogni successione* $\{x_k\}$ *tale che*

- $x_k \in \mathcal{F}$
- $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$

abbiamo $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Proposizione (Compattezza delle curve di livello)

Supponiamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ *sia non vuoto e che* $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *sia continua. Allora, tutte le curve di livello di* f *su* $\mathcal{F}$ *sono compatte se e solo se accade che:*

(i) f *è coerciva su* $\mathcal{F}$

(ii) *per ogni successione* $\{x_k\}$ *tale che* $x_k \in \mathcal{F}$ *e* $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \notin \mathcal{F}$ *abbiamo che* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Condizioni di esistenza

Definizione (Coercività su $\mathcal{F}$)

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è coerciva su* $\mathcal{F}$ *quando, per ogni successione* $\{x_k\}$ *tale che*

- $x_k \in \mathcal{F}$
- $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$

abbiamo $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Proposizione (Compattezza delle curve di livello)

Supponiamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ *sia non vuoto e che* $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *sia continua. Allora, tutte le curve di livello di* f *su* $\mathcal{F}$ *sono compatte se e solo se accade che:*

(i) f *è coerciva su* $\mathcal{F}$

(ii) *per ogni successione* $\{x_k\}$ *tale che* $x_k \in \mathcal{F}$ *e* $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \notin \mathcal{F}$ *abbiamo che* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Condizioni di esistenza

Definizione (Coercività su $\mathcal{F}$)

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è coerciva su* $\mathcal{F}$ *quando, per ogni successione* $\{x_k\}$ *tale che*

- $x_k \in \mathcal{F}$
- $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$

abbiamo $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Proposizione (Compattezza delle curve di livello)

Supponiamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ *sia non vuoto e che* $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *sia continua. Allora, tutte le curve di livello di* f *su* $\mathcal{F}$ *sono compatte se e solo se accade che:*

(i) f *è coerciva su* $\mathcal{F}$

(ii) *per ogni successione* $\{x_k\}$ *tale che* $x_k \in \mathcal{F}$ *e* $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \notin \mathcal{F}$ *abbiamo che* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$

Condizioni di esistenza

Teorema (C.S. di esistenza)

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $\mathcal{F}$. Supponiamo che

(i) *f è coerciva su $\mathcal{F}$*

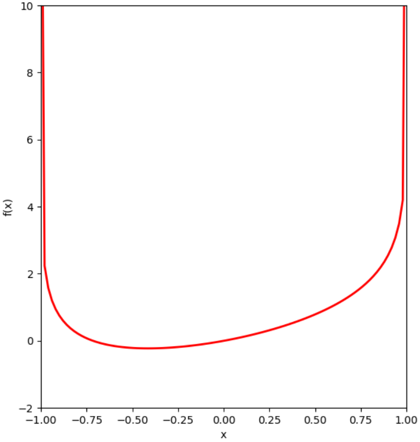
(ii) *per ogni successione $\{x_k\}$ tale che $x_k \in \mathcal{F}$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \notin \mathcal{F}$ abbiamo che $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$*

Allora, f ammette minimo globale su $\mathcal{F}$.

Esempio

Consideriamo il problema

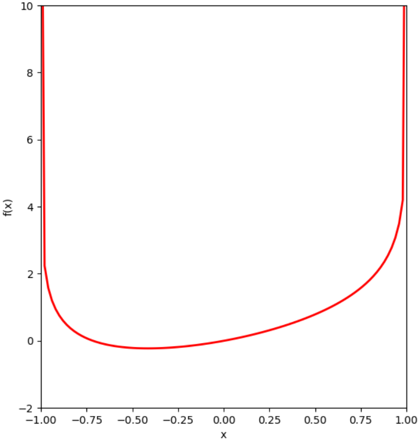
$$\begin{aligned} &\min \; x - \log(x+1) - \log(1-x) \\ &s.t. \; -1 < x < 1 \end{aligned}$$



Esempio

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} &\min \ \ x - \log(x+1) - \log(1-x) \\ &s.t. \ \ -1 < x < 1 \end{aligned}$$



Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)

Quindi, x^* **ammissibile**, e.g. $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^* \geq 0$ e dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)

  Quindi, x^* **ammissibile**, e.g. $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^* \geq 0$ *e dei moltiplicatori* $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$, *non tutti nulli, tali che:*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)

  Quindi, x^* **ammissibile**, e.g. $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^* \geq 0$ e dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Dimostrazione – F.J.

Attenzione: il punto di minimo locale x^* è **noto**, lo conosciamo perfettamente e, inoltre, conosciamo un numero $\epsilon > 0$ per cui

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall\, x \in \mathcal{F} \cap \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$$

con $\bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ Siccome g_i sono continue ed in numero finito, (per il teorema di conservazione del segno) possiamo anche scegliere ϵ sufficientemente piccolo in modo che

$$g_i(x) < 0, \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \text{ e } \forall\, i : \ g_i(x^*) < 0.$$

Dimostrazione – F.J.

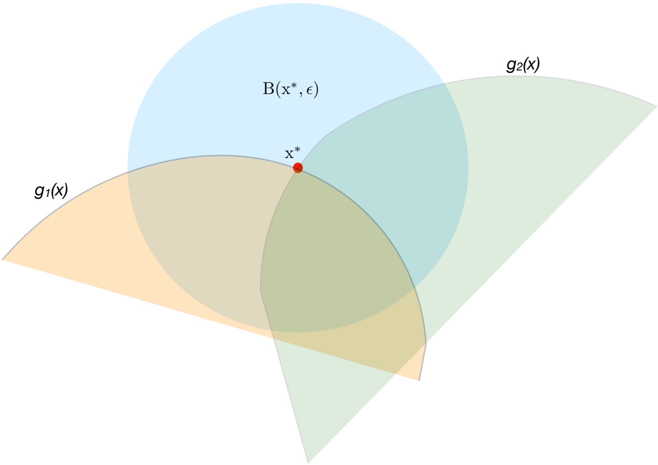
Attenzione: il punto di minimo locale x^* è **noto**, lo conosciamo perfettamente e, inoltre, conosciamo un numero $\epsilon > 0$ per cui

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall\, x \in \mathcal{F} \cap \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$$

con $\bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ Siccome g_i sono continue ed in numero finito, (per il teorema di conservazione del segno) possiamo anche scegliere ϵ sufficientemente piccolo in modo che

$$g_i(x) < 0, \quad \forall\, x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \text{ e } \forall\, i : \ g_i(x^*) < 0.$$

Dimostrazione – F.J.



Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni intero k, definiamo una funzione ausiliaria $F_k(x)$ in questo modo

$$F_k(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)^2\right)$$

dove $\alpha > 0$ e $g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$.

Attenzione: $(g_i^+(x))^2$ è una funzione continuamente differenziabile con gradiente

$$\nabla(g_i^+(x))^2 = 2g_i^+(x)\nabla g_i(x)$$

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni intero k, definiamo una funzione ausiliaria $F_k(x)$ in questo modo

$$F_k(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)^2\right)$$

dove $\alpha > 0$ e $g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$.

Attenzione: $(g_i^+(x))^2$ è una funzione continuamente differenziabile con gradiente

$$\nabla(g_i^+(x))^2 = 2g_i^+(x)\nabla g_i(x)$$

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni intero k, definiamo una funzione ausiliaria $F_k(x)$ in questo modo

$$F_k(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)^2\right)$$

dove $\alpha > 0$ e $g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$.

Attenzione: $(g_i^+(x))^2$ è una funzione continuamente differenziabile con gradiente

$$\nabla(g_i^+(x))^2 = 2g_i^+(x)\nabla g_i(x)$$

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni intero k, definiamo una funzione ausiliaria $F_k(x)$ in questo modo

$$F_k(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)^2\right)$$

dove $\alpha > 0$ e $g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$.

Attenzione: $(g_i^+(x))^2$ è una funzione continuamente differenziabile con gradiente

$$\nabla(g_i^+(x))^2 = 2g_i^+(x)\nabla g_i(x)$$

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni intero k, definiamo una funzione ausiliaria $F_k(x)$ in questo modo

$$F_k(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)^2\right)$$

dove $\alpha > 0$ e $g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$.

Attenzione: $(g_i^+(x))^2$ è una funzione continuamente differenziabile con gradiente

$$\nabla(g_i^+(x))^2 = 2g_i^+(x)\nabla g_i(x)$$

Dimostrazione – F.J.

Per ogni k, consideriamo il problema vincolato seguente

$$\begin{array}{l} \min \ F_k(x) \\ s.t. \ x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \end{array}$$

Siccome $\bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$ è un insieme compatto e $F_k(x)$ è continua,

- deve esistere il **minimo globale** x_k
- deve inoltre risultare $F_k(x_k) \leq F_k(x^*) = f(x^*)$

N.B.: Abbiamo "magicamente" definito una successione di punti $\{x_k\}$

Dimostrazione – F.J.

Per ogni k, consideriamo il problema vincolato seguente

$$\begin{array}{l} \min\ F_k(x) \\ s.t.\ x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \end{array}$$

Siccome $\bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$ è un insieme compatto e $F_k(x)$ è continua,

- deve esistere il **minimo globale** x_k
- deve inoltre risultare $F_k(x_k) \leq F_k(x^*) = f(x^*)$

N.B.: Abbiamo "magicamente" definito una successione di punti $\{x_k\}$

Dimostrazione – F.J.

Per ogni k, consideriamo il problema vincolato seguente

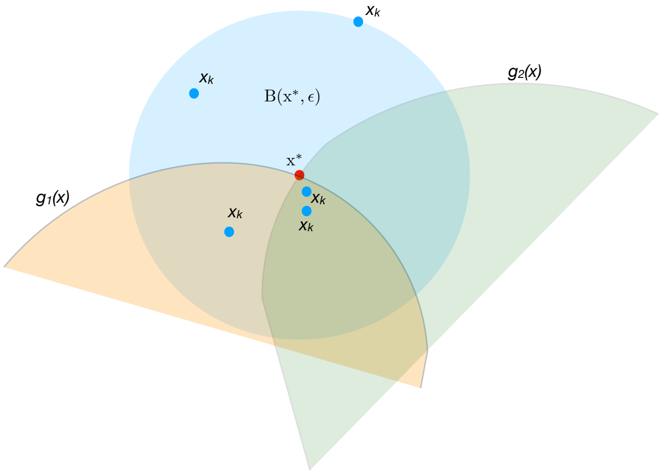
$$\begin{array}{l} \min \; F_k(x) \\ s.t. \; x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \end{array}$$

Siccome $\bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$ è un insieme compatto e $F_k(x)$ è continua,

- deve esistere il **minimo globale** x_k
- deve inoltre risultare $F_k(x_k) \leq F_k(x^*) = f(x^*)$

N.B.: Abbiamo "magicamente" definito una successione di punti $\{x_k\}$

Dimostrazione – F.J.

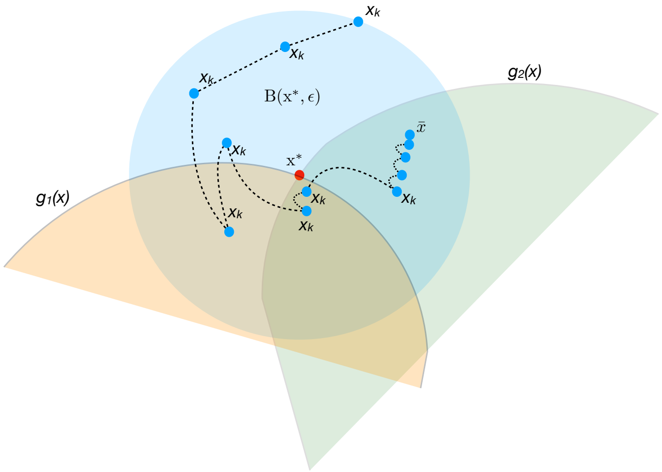


Dimostrazione – F.J.

La successione di punti $\{x_k\}$ deve ammettere (almeno) una sottosuccessione convergente, che chiamiamo ancora $\{x_k\}$, ad un punto $\bar{x} \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$

$$x_k \to \bar{x} \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon)$$

Dimostrazione – F.J.



Dimostrazione – F.J.

Ricordiamo che, per ogni k, abbiamo $F_k(x_k) \le f(x^*)$ quindi

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*)$$

$$\frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*) - f(x_k)$$

$$\frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \le \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Dimostrazione – F.J.

Ricordiamo che, per ogni k, abbiamo $F_k(x_k) \leq f(x^*)$ quindi

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*)$$

$$\frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*) - f(x_k)$$

$$\frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \leq \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Dimostrazione – F.J.

Ricordiamo che, per ogni k, abbiamo $F_k(x_k) \le f(x^*)$ quindi

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*)$$

$$\frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*) - f(x_k)$$

$$\frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \le \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Dimostrazione – F.J.

Ricordiamo che, per ogni k, abbiamo $F_k(x_k) \leq f(x^*)$ quindi

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*)$$

$$\frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*) - f(x_k)$$

$$\frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \leq \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Dimostrazione – F.J.

Ricordiamo che, per ogni k, abbiamo $F_k(x_k) \le f(x^*)$ quindi

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*)$$

$$\frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*) - f(x_k)$$

$$\frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \le \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Dimostrazione – F.J.

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \leq \frac{2}{k} \underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Percui, prendendo il limite per $k \to \infty$, possiamo scrivere

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) = 0$$

da cui segue, per continuità di g_i^+ e h_i, che

$$g(\bar{x}) \leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0$$

cioè, $\bar{x}$ è **ammissibile** per il problema !!

Dimostrazione – F.J.

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \leq \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Percui, prendendo il limite per $k \to \infty$, possiamo scrivere

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) = 0$$

da cui segue, per continuità di g_i^+ e h_i, che

$$g(\bar{x}) \leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0$$

cioè, $\bar{x}$ è **ammissibile** per il problema !!

Dimostrazione – F.J.

$$\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2 \leq \frac{2}{k}\underbrace{\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2\right)}_{\text{quantità limitata}}$$

Percui, prendendo il limite per $k \to \infty$, possiamo scrivere

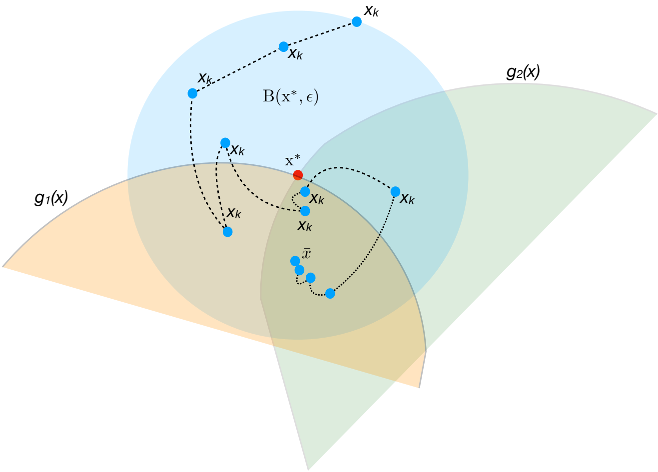
$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) = 0$$

da cui segue, per continuità di g_i^+ e h_i, che

$$g(\bar{x}) \leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0$$

cioè, $\bar{x}$ è **ammissibile** per il problema !!

Dimostrazione – F.J.



Dimostrazione – F.J.

Sempre dal fatto che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*)$$

risulta anche che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

e quindi, al limite

$$f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

D'altra parte, essendo $\bar{x}$ ammissibile, deve anche risultare $f(\bar{x}) \geq f(x^*)$ e quindi

$$f(x^*) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

cioè

$$\|\bar{x} - x^*\|^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x^*$$

Dimostrazione – F.J.

Sempre dal fatto che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*)$$

risulta anche che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

e quindi, al limite

$$f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

D'altra parte, essendo $\bar{x}$ ammissibile, deve anche risultare $f(\bar{x}) \geq f(x^*)$ e quindi

$$f(x^*) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

cioè

$$\|\bar{x} - x^*\|^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x^*$$

Dimostrazione – F.J.

Sempre dal fatto che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \leq f(x^*)$$

risulta anche che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

e quindi, al limite

$$f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

D'altra parte, essendo $\bar{x}$ ammissibile, deve anche risultare $f(\bar{x}) \geq f(x^*)$ e quindi

$$f(x^*) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*)$$

cioè

$$\|\bar{x} - x^*\|^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x^*$$

Dimostrazione – F.J.

Sempre dal fatto che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*)$$

risulta anche che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 \le f(x^*)$$

e quindi, al limite

$$f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \le f(x^*)$$

D'altra parte, essendo $\bar{x}$ ammissibile, deve anche risultare $f(\bar{x}) \ge f(x^*)$ e quindi

$$f(x^*) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \le f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \le f(x^*)$$

cioè

$$\|\bar{x} - x^*\|^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x^*$$

Dimostrazione – F.J.

Sempre dal fatto che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} h_i(x_k)^2\right) \le f(x^*)$$

risulta anche che

$$f(x_k) + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x^*\|^2 \le f(x^*)$$

e quindi, al limite

$$f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \le f(x^*)$$

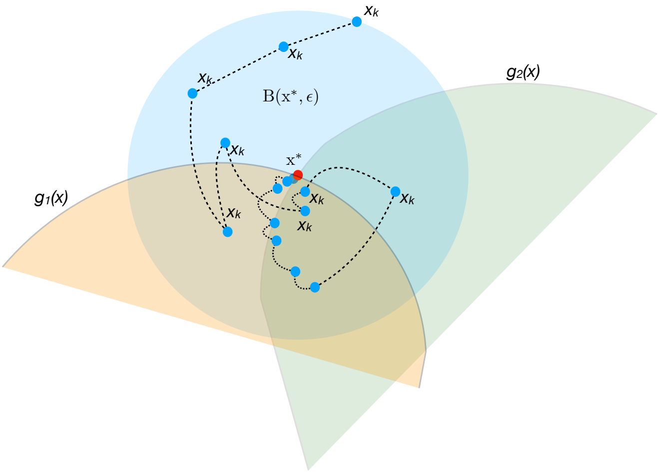
D'altra parte, essendo $\bar{x}$ ammissibile, deve anche risultare $f(\bar{x}) \ge f(x^*)$ e quindi

$$f(x^*) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \le f(\bar{x}) + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x^*\|^2 \le f(x^*)$$

cioè

$$\|\bar{x} - x^*\|^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = x^*$$

Dimostrazione – F.J.



Dimostrazione – F.J.

Quindi la successione $\{x_k\}$ converge proprio ad x^*!!
Quindi, per k suff. elevati, x_k deve essere un minimo **non vincolato** di $F_k(x)$
Quindi $\nabla F_k(x_k) = 0$ ovvero

$$\nabla f(x_k) + \alpha(x_k - x^*) + \sum_{i=1}^{m} k g_i^+(x_k) \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^{p} k h_i(x_k) \nabla h_i(x_k) = 0$$

Dimostrazione – F.J.

Quindi la successione $\{x_k\}$ converge proprio ad x^*!!
Quindi, per k suff. elevati, x_k deve essere un minimo **non vincolato** di $F_k(x)$
Quindi $\nabla F_k(x_k) = 0$ ovvero

$$\nabla f(x_k) + \alpha(x_k - x^*) + \sum_{i=1}^{m} k g_i^+(x_k) \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^{p} k h_i(x_k) \nabla h_i(x_k) = 0$$

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni k, definiamo le quantità

$$
\begin{aligned}
L^k &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (k g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} (k h_i(x_k))^2\right)^{1/2} \\
\lambda_0^k &= \frac{1}{L^k} \geq 0 \\
\lambda_i^k &= \frac{k g_i^+(x_k)}{L^k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
\mu_i^k &= \frac{k h_i(x_k)}{L^k}, \quad i = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$ e $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)$ è facile verificare che il vettore $(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma euclidea unitaria.

La successione $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$ appartiene alla sfera unitaria (che è un insieme compatto), quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) convergente ad un vettore $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ a norma unitaria

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni k, definiamo le quantità

$$
\begin{aligned}
L^k &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (k g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} (k h_i(x_k))^2\right)^{1/2} \\
\lambda_0^k &= \frac{1}{L^k} \geq 0 \\
\lambda_i^k &= \frac{k g_i^+(x_k)}{L^k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
\mu_i^k &= \frac{k h_i(x_k)}{L^k}, \quad i = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$ e $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)$ è facile verificare che il vettore $(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma euclidea unitaria.

La successione $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$ appartiene alla sfera unitaria (che è un insieme compatto), quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) convergente ad un vettore $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ a norma unitaria

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni k, definiamo le quantità

$$
\begin{aligned}
L^k &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (k g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} (k h_i(x_k))^2\right)^{1/2} \\
\lambda_0^k &= \frac{1}{L^k} \geq 0 \\
\lambda_i^k &= \frac{k g_i^+(x_k)}{L^k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
\mu_i^k &= \frac{k h_i(x_k)}{L^k}, \quad i = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$ e $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)$ è facile verificare che il vettore $(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma euclidea unitaria.

La successione $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$ appartiene alla sfera unitaria (che è un insieme compatto), quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) convergente ad un vettore $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ a norma unitaria

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni k, definiamo le quantità

$$
\begin{aligned}
L^k &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m}(kg_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p}(kh_i(x_k))^2\right)^{1/2} \\
\lambda_0^k &= \frac{1}{L^k} \geq 0 \\
\lambda_i^k &= \frac{kg_i^+(x_k)}{L^k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
\mu_i^k &= \frac{kh_i(x_k)}{L^k}, \quad i = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$ e $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)$ è facile verificare che il vettore $(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma euclidea unitaria.

La successione $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$ appartiene alla sfera unitaria (che è un insieme compatto), quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) convergente ad un vettore $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ a norma unitaria

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni k, definiamo le quantità

$$
\begin{aligned}
L^k &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (k g_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} (k h_i(x_k))^2\right)^{1/2} \\
\lambda_0^k &= \frac{1}{L^k} \geq 0 \\
\lambda_i^k &= \frac{k g_i^+(x_k)}{L^k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
\mu_i^k &= \frac{k h_i(x_k)}{L^k}, \quad i = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$ e $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_p^k)$ è facile verificare che il vettore $(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma euclidea unitaria.

La successione $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$ appartiene alla sfera unitaria (che è un insieme compatto), quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) convergente ad un vettore $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ a norma unitaria

Dimostrazione – F.J.

Ora, per ogni k, definiamo le quantità

$$
\begin{aligned}
L^k &= \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (kg_i^+(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{p} (kh_i(x_k))^2\right)^{1/2} \\
\lambda_0^k &= \frac{1}{L^k} \geq 0 \\
\lambda_i^k &= \frac{kg_i^+(x_k)}{L^k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
\mu_i^k &= \frac{kh_i(x_k)}{L^k}, \quad i = 1, 2, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Ponendo $\lambda^k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k)$ e $\mu^k = (\mu_1^k, \ldots, \mu_p^k)$ è facile verificare che il vettore $(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ ha norma euclidea unitaria.

La successione $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$ appartiene alla sfera unitaria (che è un insieme compatto), quindi è possibile estrarre una sottosuccessione (che ridefiniamo $\{(\lambda_0^k, \lambda^k, \mu^k)\}$) convergente ad un vettore $(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)$ a norma unitaria

Dimostrazione – F.J.

Si avrà quindi:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_0^k = \lambda_0^* \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = \lambda_i^* \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_i^k = \mu_i^*$$

con

$$\|(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)\| = 1$$

Riprendiamo la condizione di stazionarietà $\nabla F_k(x_k) = 0$ e dividiamo ambo i membri per L^k. Otteniamo

$$\lambda_0^k \nabla f(x_k) + \frac{\alpha(x_k - x^*)}{L^k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla h_i(x_k) = 0$$

da cui segue, per $k \to \infty$,

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

Dimostrazione – F.J.

Si avrà quindi:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_0^k = \lambda_0^* \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = \lambda_i^* \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_i^k = \mu_i^*$$

con

$$\|(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)\| = 1$$

Riprendiamo la condizione di stazionarietà $\nabla F_k(x_k) = 0$ e dividiamo ambo i membri per L^k. Otteniamo

$$\lambda_0^k \nabla f(x_k) + \frac{\alpha(x_k - x^*)}{L^k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla h_i(x_k) = 0$$

da cui segue, per $k \to \infty$,

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

Dimostrazione – F.J.

Si avrà quindi:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_0^k = \lambda_0^* \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = \lambda_i^* \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_i^k = \mu_i^*$$

con

$$\|(\lambda_0^*, \lambda^*, \mu^*)\| = 1$$

Riprendiamo la condizione di stazionarietà $\nabla F_k(x_k) = 0$ e dividiamo ambo i membri per L^k. Otteniamo

$$\lambda_0^k \nabla f(x_k) + \frac{\alpha(x_k - x^*)}{L^k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x_k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla h_i(x_k) = 0$$

da cui segue, per $k \to \infty$,

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

Dimostrazione – F.J.

Rimane da far vedere che valgono anche le condizioni complementarità cioè che, per ogni $i = 1, \dots, m$,

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$$

Per questo ci dobbiamo ricordare che avevamo scelto ϵ sufficientemente piccolo per fare si che

$$g_i(x) < 0, \quad \forall\ x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \text{ e } \forall\ i : \ g_i(x^*) < 0.$$

Quindi, per i tale che $g_i(x^*) < 0$ risulta anche $g_i(x_k) < 0$. Dalla definizione di λ_i^k, risulta

$$\lambda_i^k = \frac{k}{L^k} \max\{0, g_i(x_k)\} = 0$$

Percui, $\lambda_i^k = \lambda_i^* = 0$ e quindi $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ □

Dimostrazione – F.J.

Rimane da far vedere che valgono anche le condizioni complementarità cioè che, per ogni $i = 1, \ldots, m$,

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$$

Per questo ci dobbiamo ricordare che avevamo scelto ϵ sufficientemente piccolo per fare si che

$$g_i(x) < 0, \quad \forall\ x \in \bar{\mathcal{B}}(x^*, \epsilon) \text{ e } \forall\ i :\ g_i(x^*) < 0.$$

Quindi, per i tale che $g_i(x^*) < 0$ risulta anche $g_i(x_k) < 0$. Dalla definizione di λ_i^k, risulta

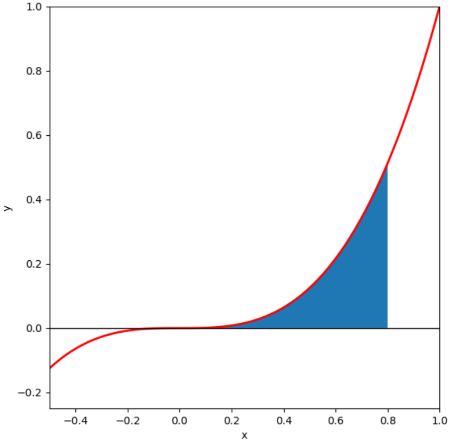
$$\lambda_i^k = \frac{k}{L^k} \max\{0, g_i(x_k)\} = 0$$

Percui, $\lambda_i^k = \lambda_i^* = 0$ e quindi $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ □

Mercoledì 18 Marzo 2020 – III parte

Esempio

$$\min \ x$$
$$s.t. \ y \geq 0, \ \ y \leq x^3, \ \ x \leq 0.8$$



Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \dots, p,\ \nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

  e.g. $\left\{\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \ldots, p,\ \nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$ *tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \ldots, p,\ \nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0$$

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \; x_2 \geq 0$$

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_2 - x_1^3 \leq 0, \; x_2 \geq 0$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$