Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 2 Aprile 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Algoritmo di soluzione

Algoritmo `SEQPEN`

INPUT: `maxit`, $\tau > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$ `maxit`

Trova una soluzione $(x(\epsilon_k))$ del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{1}$$

if $q(x(\epsilon_k)) \leq \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x(\epsilon_k)$

Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \; -x^4$$
$$x = 1$$

Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\begin{gathered} \min \ -x^4 \\ x = 1 \end{gathered}$$

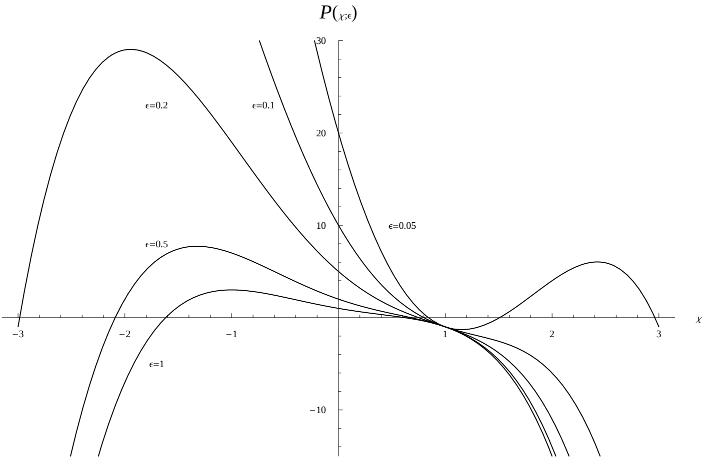
Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$)



Algoritmo SEQPEN

Algoritmo SEQPEN

INPUT: maxit, $\tau > 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$ maxit

Trova una soluzione globale (x^k) del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x).$$

if $q(x^k) \leq \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN

L'algoritmo che abbiamo visto:

- ad ogni passo richiede di risolvere all'ottimo **gloable**

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; P_\epsilon(x);$$

- è (o può essere) **molto costoso**;
- non sempre è possibile;
- gli algoritmi di min. non vincolata determinano $\hat{x}$ t.c.

$$\|\nabla P_\epsilon(\hat{x})\| \leq \texttt{tol}.$$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \dots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \rho$

if $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \tau_k$

if $\tau_k < \rho$ **and** $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Proprietà di convergenza

Teorema

Assumiamo che:

- $\{\epsilon_k\} \to 0$, $\{\tau_k\} \to 0$
- *per ogni* k, x_k *t.c* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$
- *per ogni* k, $x_k \in D$ *compatto*
- *per ogni* $x \in D$, *i gradienti* $\nabla g_i(x)$, $i \in I_+(x)$, $\nabla h_j(x)$, $\forall\, j$, *dove* $I_+(x) = \{i : g_i(x) \geq 0\}$, *sono lin. indipendenti.*

Allora, se x^* *è un punto limite di* $\{x_k\}$, *i.e.* $\exists K$ *s.t.*

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = x^*$$

x^* *è un punto di KKT con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*, \quad \left\{\frac{2}{\epsilon_k}h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Proprietà di convergenza

Teorema

Assumiamo che:

- $\{\epsilon_k\} \to 0$, $\{\tau_k\} \to 0$
- *per ogni* k, x_k *t.c* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$
- *per ogni* k, $x_k \in D$ *compatto*
- *per ogni* $x \in D$, *i gradienti* $\nabla g_i(x)$, $i \in I_+(x)$, $\nabla h_j(x)$, $\forall\ j$, *dove* $I_+(x) = \{i : g_i(x) \geq 0\}$, *sono lin. indipendenti.*

Allora, se x^* *è un punto limite di* $\{x_k\}$, *i.e.* $\exists K$ *s.t.*

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = x^*$$

x^* *è un punto di KKT con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*, \quad \left\{\frac{2}{\epsilon_k}h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Proprietà di convergenza

Teorema

Assumiamo che:

- $\{\epsilon_k\} \to 0$, $\{\tau_k\} \to 0$
- *per ogni* k, x_k *t.c* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$
- *per ogni* k, $x_k \in D$ *compatto*
- *per ogni* $x \in D$, *i gradienti* $\nabla g_i(x)$, $i \in I_+(x)$, $\nabla h_j(x)$, $\forall\ j$, *dove* $I_+(x) = \{i : g_i(x) \geq 0\}$, *sono lin. indipendenti.*

Allora, se x^* *è un punto limite di* $\{x_k\}$, *i.e.* $\exists K$ *s.t.*

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = x^*$$

x^* *è un punto di KKT con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*, \quad \left\{\frac{2}{\epsilon_k}h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Proprietà di convergenza

Teorema

Assumiamo che:

- $\{\epsilon_k\} \to 0$, $\{\tau_k\} \to 0$
- *per ogni* k, x_k *t.c* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$
- *per ogni* k, $x_k \in D$ *compatto*
- *per ogni* $x \in D$, *i gradienti* $\nabla g_i(x)$, $i \in I_+(x)$, $\nabla h_j(x)$, $\forall\, j$, *dove* $I_+(x) = \{i : g_i(x) \geq 0\}$, *sono lin. indipendenti.*

Allora, se x^* *è un punto limite di* $\{x_k\}$, *i.e.* $\exists K$ *s.t.*

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = x^*$$

x^* *è un punto di KKT con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*, \quad \left\{\frac{2}{\epsilon_k} h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Proprietà di convergenza

Teorema

Assumiamo che:

- $\{\epsilon_k\} \to 0$, $\{\tau_k\} \to 0$
- *per ogni* k, x_k *t.c* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$
- *per ogni* k, $x_k \in D$ *compatto*
- *per ogni* $x \in D$, *i gradienti* $\nabla g_i(x)$, $i \in I_+(x)$, $\nabla h_j(x)$, $\forall\, j$, *dove* $I_+(x) = \{i : g_i(x) \geq 0\}$, *sono lin. indipendenti.*

Allora, se x^* *è un punto limite di* $\{x_k\}$, *i.e.* $\exists K$ *s.t.*

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = x^*$$

x^* *è un punto di KKT con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*, \quad \left\{\frac{2}{\epsilon_k}h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Proprietà di convergenza

Teorema

Assumiamo che:

- $\{\epsilon_k\} \to 0$, $\{\tau_k\} \to 0$
- *per ogni* k, x_k *t.c* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$
- *per ogni* k, $x_k \in D$ *compatto*
- *per ogni* $x \in D$, *i gradienti* $\nabla g_i(x)$, $i \in I_+(x)$, $\nabla h_j(x)$, $\forall\, j$, *dove* $I_+(x) = \{i : g_i(x) \geq 0\}$, *sono lin. indipendenti.*

Allora, se x^* *è un punto limite di* $\{x_k\}$, *i.e.* $\exists K$ *s.t.*

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = x^*$$

x^* *è un punto di KKT con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*, \quad \left\{\frac{2}{\epsilon_k} h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Dimostrazione

Dim. Rinominiamo $\{x_k\}$ la sottosucc. convergente a x^*.
Dalla espressione del gradiente di $P_{\epsilon_k}(x)$ possiamo scrivere

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)\lambda_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

dove si è posto

$$\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\} = \lambda_k, \quad \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) = \mu_k$$

Per continuità e siccome $x_k \to x^*$, abbiamo che, per k suff. elevato, $\max\{g_i(x_k), 0\} = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$. Quindi, $(\lambda_k)_i = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$.

Ora, chiamiamo

- $\tilde{\lambda}_k$ il vettore con componenti $(\tilde{\lambda}_k)_i = \frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}$ per ogni $i \in I_+(x^*)$
- $\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)$ la matrice con colonne $\nabla g_i(x_k)$ per ogni $i \in I_+(x^*)$

N.B. $\tilde{\lambda}_k$ è un sottovettore di λ_k, $\tilde{\lambda}_k = (\lambda_k)_{I_+(x^*)}$

Dimostrazione

Dim. Rinominiamo $\{x_k\}$ la sottosucc. convergente a x^*.
Dalla espressione del gradiente di $P_{\epsilon_k}(x)$ possiamo scrivere

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)\lambda_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

dove si è posto

$$\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\} = \lambda_k, \quad \frac{2}{\epsilon_k}h(x_k) = \mu_k$$

Per continuità e siccome $x_k \to x^*$, abbiamo che, per k suff. elevato, $\max\{g_i(x_k), 0\} = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$. Quindi, $(\lambda_k)_i = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$.

Ora, chiamiamo

- $\tilde{\lambda}_k$ il vettore con componenti $(\tilde{\lambda}_k)_i = \frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}$ per ogni $i \in I_+(x^*)$
- $\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)$ la matrice con colonne $\nabla g_i(x_k)$ per ogni $i \in I_+(x^*)$

N.B. $\tilde{\lambda}_k$ è un sottovettore di λ_k, $\tilde{\lambda}_k = (\lambda_k)_{I_+(x^*)}$

Dimostrazione

Dim. Rinominiamo $\{x_k\}$ la sottosucc. convergente a x^*.
Dalla espressione del gradiente di $P_{\epsilon_k}(x)$ possiamo scrivere

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)\lambda_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

dove si è posto

$$\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\} = \lambda_k, \quad \frac{2}{\epsilon_k}h(x_k) = \mu_k$$

Per continuità e siccome $x_k \to x^*$, abbiamo che, per k suff. elevato, $\max\{g_i(x_k), 0\} = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$. Quindi, $(\lambda_k)_i = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$.

Ora, chiamiamo

- $\tilde{\lambda}_k$ il vettore con componenti $(\tilde{\lambda}_k)_i = \frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}$ per ogni $i \in I_+(x^*)$
- $\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)$ la matrice con colonne $\nabla g_i(x_k)$ per ogni $i \in I_+(x^*)$

N.B. $\tilde{\lambda}_k$ è un sottovettore di λ_k, $\tilde{\lambda}_k = (\lambda_k)_{I_+(x^*)}$

Dimostrazione

Dim. Rinominiamo $\{x_k\}$ la sottosucc. convergente a x^*.
Dalla espressione del gradiente di $P_{\epsilon_k}(x)$ possiamo scrivere

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)\lambda_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

dove si è posto

$$\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\} = \lambda_k, \quad \frac{2}{\epsilon_k}h(x_k) = \mu_k$$

Per continuità e siccome $x_k \to x^*$, abbiamo che, per k suff. elevato, $\max\{g_i(x_k), 0\} = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$. Quindi, $(\lambda_k)_i = 0$ per ogni $i \notin I_+(x^*)$.

Ora, chiamiamo

- $\tilde{\lambda}_k$ il vettore con componenti $(\tilde{\lambda}_k)_i = \frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}$ per ogni $i \in I_+(x^*)$
- $\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)$ la matrice con colonne $\nabla g_i(x_k)$ per ogni $i \in I_+(x^*)$

N.B. $\tilde{\lambda}_k$ è un sottovettore di λ_k, $\tilde{\lambda}_k = (\lambda_k)_{I_+(x^*)}$

Dimostrazione – continua

Possiamo riscrivere $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)$ come

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)\tilde{\lambda}_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

ovvero

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + M(x_k)u_k$$

dove

$$M(x_k) = \left(\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k) \ \nabla h(x_k)\right), \quad \text{e} \quad u_k = (\tilde{\lambda}_k \ \mu_k)^\top$$

Per ipotesi, la matrice $M(x_k)$ ha colonne lin. indipendenti. Quindi $M(x_k)^\top M(x_k)$ è invertibile

Quindi, possiamo ottener u_k

$$u_k = (M(x_k)^\top M(x_k))^{-1} M(x_k)^\top (\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) - \nabla f(x_k))$$

Dimostrazione – continua

Possiamo riscrivere $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)$ come

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)\tilde{\lambda}_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

ovvero

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + M(x_k)u_k$$

dove

$$M(x_k) = \left(\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)\ \nabla h(x_k)\right), \quad \text{e} \quad u_k = (\tilde{\lambda}_k\ \mu_k)^\top$$

Per ipotesi, la matrice $M(x_k)$ ha colonne lin. indipendenti. Quindi $M(x_k)^\top M(x_k)$ è invertibile

Quindi, possiamo ottener u_k

$$u_k = (M(x_k)^\top M(x_k))^{-1} M(x_k)^\top (\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) - \nabla f(x_k))$$

Dimostrazione – continua

Possiamo riscrivere $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)$ come

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + \nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)\tilde{\lambda}_k + \nabla h(x_k)\mu_k$$

ovvero

$$\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + M(x_k)u_k$$

dove

$$M(x_k) = \left(\nabla g_{I_+(x^*)}(x_k)\ \nabla h(x_k)\right), \quad \text{e} \quad u_k = (\tilde{\lambda}_k\ \mu_k)^\top$$

Per ipotesi, la matrice $M(x_k)$ ha colonne lin. indipendenti. Quindi $M(x_k)^\top M(x_k)$ è invertibile

Quindi, possiamo ottener u_k

$$u_k = (M(x_k)^\top M(x_k))^{-1} M(x_k)^\top (\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) - \nabla f(x_k))$$

Dimostrazione – continua

Ora, siccome per ipotesi $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) \to \mathbf{0}$, otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u^* = -(M(x^*)^\top M(x^*))^{-1} M(x^*)^\top \nabla f(x^*)$$

e quindi da $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + M(x_k)u_k$ otteniamo

$$\nabla f(x^*) + M(x^*)u^* = \mathbf{0}$$

percui

$$\nabla f(x^*) + \nabla g_{I_+(x^*)}(x^*)\lambda^*_{I_+(x^*)} + \nabla h(x^*)\mu^* = \mathbf{0}$$

e anche, ponendo $\lambda_i^* = 0$, per ogni $i \notin I_+(x^*)$,

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* + \nabla h(x^*)\mu^* = \mathbf{0}$$

Dimostrazione – continua

Ora, siccome per ipotesi $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) \to \mathbf{0}$, otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u^* = -(M(x^*)^\top M(x^*))^{-1} M(x^*)^\top \nabla f(x^*)$$

e quindi da $\nabla P_{\epsilon_k}(x_k) = \nabla f(x_k) + M(x_k)u_k$ otteniamo

$$\nabla f(x^*) + M(x^*)u^* = \mathbf{0}$$

percui

$$\nabla f(x^*) + \nabla g_{I_+(x^*)}(x^*)\lambda^*_{I_+(x^*)} + \nabla h(x^*)\mu^* = \mathbf{0}$$

e anche, ponendo $\lambda_i^* = 0$, per ogni $i \notin I_+(x^*)$,

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* + \nabla h(x^*)\mu^* = \mathbf{0}$$

Dimostrazione – continua

Dal fatto che $(\lambda_k, \mu_k) \to (\lambda^*, \mu^*)$, ricordando le esperssioni di λ_k, μ_k

$$\frac{2}{\epsilon_k} \max\{g(x_k), 0\} = \lambda_k, \quad \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) = \mu_k$$

e per il fatto che $\epsilon_k \to 0$, otteniamo che $\max\{g(x^*), 0\} = 0$, $h(x^*) = 0$.

La dimostrazione è conclusa ricordando che $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, per ogni i e $\lambda^* \geq 0$. $\square$

Dimostrazione – continua

Dal fatto che $(\lambda_k, \mu_k) \to (\lambda^*, \mu^*)$, ricordando le esperssioni di λ_k, μ_k

$$\frac{2}{\epsilon_k} \max\{g(x_k), 0\} = \lambda_k, \quad \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) = \mu_k$$

e per il fatto che $\epsilon_k \to 0$, otteniamo che $\max\{g(x^*), 0\} = 0$, $h(x^*) = 0$.

La dimostrazione è conclusa ricordando che $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, per ogni i e $\lambda^* \geq 0$. $\square$

Un po' di esempi di risoluzione

`esempio3`:

$$\begin{array}{l} \min\ -x_1 - x_2 \\ s.t.\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$

$x^0 = (-1,\ -1)^\top$
Ammete $(x^*, y^*) = (1,\ 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x - y + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

`esempio3`:

$$\begin{aligned} &\min \ -x_1 - x_2 \\ &s.t. \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

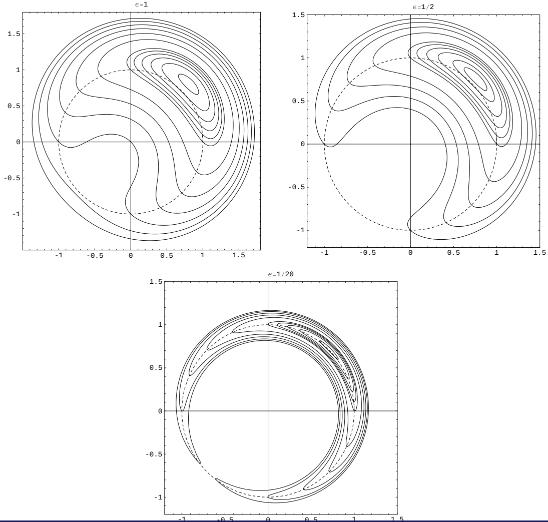
$x^0 = (-1,\ -1)^\top$
Ammete $(x^*, y^*) = (1,\ 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x - y + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

Grafici di $P_\epsilon(x)$ $(\epsilon = 1, 0.5, 0.05)$



Un po' di esempi di risoluzione

`esempio4`:

$$\begin{aligned} &\min\ -x_1 - x_2 \\ &s.t.\ x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{aligned}$$

$x^0 = (-1,\ -1)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`maratos`:

$$\min \ -x_1 + 2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$s.t. \ x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$x^0 = (-1, \ -1)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs14`:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-2)^2+(x_2-1)^2 \\ &s.t.\ x_1^2/4+x_2^2 \le 1 \\ &\qquad x_1-2x_2=-1 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs24`:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_2^3((x_1-3)^2-9)/(27\sqrt{3}) \\
s.t.\ & x_1/\sqrt{3}-x_2 \geq 0 \\
& x_1+\sqrt{3}x_2 \geq 0 \\
& -x_1-\sqrt{3}x_2+6 \geq 0 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$x^0 = (1,\ 1/2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs32`:

$$
\begin{aligned}
& \min \ (x_1 + 3 * x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 \\
& s.t. \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& \qquad 6x_2 + 4x_3 - x_1^3 \geq 3 \\
& \qquad x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ \ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$x^0 = (0.1, \ 0.7, \ 0.2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs41`:

$$\begin{aligned} &\min \ 2 - x_1x_2x_3 \\ &s.t. \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ &\qquad 0 \le x_i \le 1, \ i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2,\ 2,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

hs55:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 + 4x_5 + e^{x_1 x_4} \\
s.t.\ & x_1 + 2x_2 + 5x_5 - 6 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\
& x_4 + x_5 + x_6 - 2 = 0 \\
& x_1 + x_4 - 1 = 0 \\
& x_2 + x_5 - 2 = 0 \\
& x_3 + x_6 - 2 = 0 \\
& x_i \geq 0,\ \ i = 1, \dots, 6 \\
& x_1 \leq 1,\ \ x_4 \leq 1
\end{aligned}
$$

$x^0 = (1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs60`:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^4\\ &s.t.\ x_1(1+x_2^2)+x_3^4-4-3\sqrt{2}=0\\ &\qquad -10\le x_i\le 10,\ \ i=1,2,3 \end{aligned}$$

$x^0=(2,\ 2,\ 2)^\top$