

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi¹

Giovedì 16 Aprile 2020

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Metodo di soluzione - Metodo dei Moltiplicatori

Algoritmo SEQLAGR

Dati: $\epsilon_0 > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \rightarrow 0$, $\rho > 0$, μ_0 , maxit

for $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2h(x_k)}{\epsilon_k}$$

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*)

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m$

$$L(x, y, \lambda; c) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \rightsquigarrow g_i(x) + y_i^2 = 0, i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^T g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4) \end{aligned}$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \rightsquigarrow g_i(x) + y_i^2 = 0, i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4) \end{aligned}$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \rightsquigarrow g_i(x) + y_i^2 = 0, i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4) \end{aligned}$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati ϵ e λ , bisogna “risolvere”

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati ϵ e λ , bisogna “risolvere”

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati ϵ e λ , bisogna “risolvere”

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati ϵ e λ , bisogna “risolvere”

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Gradiente della Lagrangiana

$$\nabla_x L_a = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2) \nabla g_i(x)$$

$$\nabla_\lambda L_a = g(x) + y^2$$

$$\nabla_{y_i} L_a = \frac{4}{\epsilon} y_i \left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right)$$

Quindi, ponendo $\nabla_{y_i} L_a = 0$ otteniamo

$$y_i \left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right) = 0$$

che è verificata per

$$y_i^2 = 0, \text{ oppure } y_i^2 = \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) \right\}$$

Gradiente della Lagrangiana

$$\nabla_x L_a = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2) \nabla g_i(x)$$

$$\nabla_\lambda L_a = g(x) + y^2$$

$$\nabla_{y_i} L_a = \frac{4}{\epsilon} y_i \left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right)$$

Quindi, ponendo $\nabla_{y_i} L_a = 0$ otteniamo

$$y_i \left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right) = 0$$

che è verificata per

$$y_i^2 = 0, \text{ oppure } y_i^2 = \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) \right\}$$

Gradiente della Lagrangiana – segue

Calcoliamo $\nabla_{y_i}^2 L_a$

$$\nabla_{y_i}^2 L_a = \frac{4}{\epsilon} \left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + 3y_i^2 \right)$$

- Quando $y_i^2 = 0$, $\nabla_{y_i}^2 L_a = \frac{4}{\epsilon} \left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) \right)$
- Quando $y_i^2 = -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) > 0$, $\nabla_{y_i}^2 L_a = \frac{8}{\epsilon} \left(-\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) \right)$

Imponendo $\nabla_{y_i}^2 L_a > 0$, segue che la soluzione ottima è proprio

$$y_i^2 = \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) \right\}$$

Espressione per vincoli di disuguaglianza

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top \left(g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left\| g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right\|^2$$

Ovvero

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} + \frac{1}{\epsilon} \left\| \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} \right\|^2$$

$$\nabla_x L_a(x, \lambda; \epsilon) = \nabla f(x) + \nabla g(x) \left(\lambda + \frac{2}{\epsilon} \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} \right)$$

$$\nabla_\lambda L_a(x, \lambda; \epsilon) = \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\}$$

Espressione per vincoli di disuguaglianza

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top \left(g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left\| g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right\|^2$$

Ovvero

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} + \frac{1}{\epsilon} \left\| \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} \right\|^2$$

$$\nabla_x L_a(x, \lambda; \epsilon) = \nabla f(x) + \nabla g(x) \left(\lambda + \frac{2}{\epsilon} \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} \right)$$

$$\nabla_\lambda L_a(x, \lambda; \epsilon) = \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\}$$

Metodo di soluzione - Metodo dei Moltiplicatori

Algoritmo SEQLAGR

Dati: $\epsilon_0 > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \rightarrow 0$, $\rho > 0$, λ_0 , μ_0 , maxit

for $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k, \lambda_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k, \lambda_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, $\lambda^* \leftarrow \lambda_k$ STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2h(x_k)}{\epsilon_k}, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{2 \max\{g(x_k), -\epsilon_k \lambda_k / 2\}}{\epsilon_k}$$

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*, λ^*)

Un po' di esempi di risoluzione

esempio3:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

$$x^0 = (-1, -1)^\top$$

Ammette $(x^*, y^*) = (1, 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione Lagrangiana aumentata è:

$$L_a(x, y, \mu; \epsilon) = -x - y + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

esempio3:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

$$x^0 = (-1, -1)^\top$$

Ammette $(x^*, y^*) = (1, 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione Lagrangiana aumentata è:

$$L_a(x, y, \mu; \epsilon) = -x - y + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

esempio4:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$x^0 = (-1, -1)^\top$$

Un po' di esempi di risoluzione

maratos:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

$$x^0 = (-1, -1)^\top$$

Un po' di esempi di risoluzione

hs14:

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} & x_1^2/4 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 2)^\top$$

Un po' di esempi di risoluzione

hs24:

$$\min x_2^3((x_1 - 3)^2 - 9)/(27\sqrt{3})$$

$$\text{s.t. } x_1/\sqrt{3} - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + \sqrt{3}x_2 \geq 0$$

$$-x_1 - \sqrt{3}x_2 + 6 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x^0 = (1, 1/2)^\top$$

Un po' di esempi di risoluzione

hs32:

$$\begin{aligned} \min & (x_1 + 3 * x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 6x_2 + 4x_3 - x_1^3 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^0 = (0.1, 0.7, 0.2)^T$$

Un po' di esempi di risoluzione

hs41:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2 - x_1x_2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 2, 2, 2)^\top$$

Un po' di esempi di risoluzione

hs55:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_5 + e^{x_1x_4} \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 5x_5 - 6 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ & x_4 + x_5 + x_6 - 2 = 0 \\ & x_1 + x_4 - 1 = 0 \\ & x_2 + x_5 - 2 = 0 \\ & x_3 + x_6 - 2 = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6 \\ & x_1 \leq 1, \quad x_4 \leq 1 \end{aligned}$$

$$x^0 = (1, 2, 0, 0, 0, 2)^\top$$

Un po' di esempi di risoluzione

hs60:

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^4 \\ \text{s.t.} & x_1(1 + x_2^2) + x_3^4 - 4 - 3\sqrt{2} = 0 \\ & -10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 2, 2)^\top$$