Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Mercoledì 29 Aprile 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Esempio (1)

Consideriamo il seguente problema

Disegnare nel piano xt una curva $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, tale che:

- abbia inizio nell'origine ($x(0) = 0$);
- in ciascun punto abbia pendenza non superiore ad 1 ($\dot{x}(t) \leq 1$);
- abbia massima altezza ($x(T)$) in corrispondenza dell'ascissa $t = T$

In altri termini, vogliamo risolvere il seguente "problema"

$$\begin{array}{ll} \max & x(T) \\ s.t. & \dot{x}(t) \\ & x(0) = 0 \end{array}$$

Esempio (1)

Consideriamo il seguente problema

Disegnare nel piano xt una curva $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, tale che:

- abbia inizio nell'origine ($x(0) = 0$);
- in ciascun punto abbia pendenza non superiore ad 1 ($\dot{x}(t) \leq 1$);
- abbia massima altezza ($x(T)$) in corrispondenza dell'ascissa $t = T$

In altri termini, vogliamo risolvere il seguente "problema"

$$\begin{aligned} &\max \; x(T) \\ &s.t. \; \dot{x}(t) \leq 1 \\ &\qquad x(0) = 0 \end{aligned}$$

Esempio (1)

Consideriamo il seguente problema

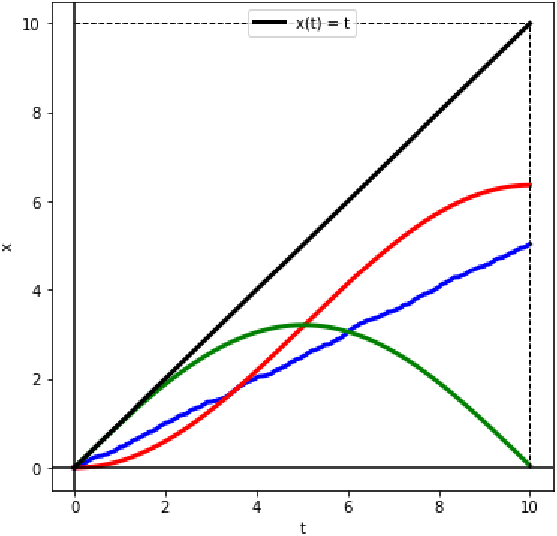
Disegnare nel piano xt una curva $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, tale che:

- abbia inizio nell'origine ($x(0) = 0$);
- in ciascun punto abbia pendenza non superiore ad 1 ($\dot{x}(t) \leq 1$);
- abbia massima altezza ($x(T)$) in corrispondenza dell'ascissa $t = T$

In altri termini, vogliamo risolvere il seguente "problema"

$$\begin{array}{l} \max \ x(T) \\ s.t. \ \dot{x}(t) = u(t), \ u(t) \leq 1 \\ \qquad x(0) = 0 \end{array}$$

Example (1)



Esempio (2)

Consideriamo il seguente problema

Si vuole accelerare un carrello di massa unitaria (m=1) in modo tale da massimizzare la distanza totale percorsa in un dato intervallo temporale meno l'energia complessivamente spesa (supponendo che il carrello parta da fermo, cioè con velocità nulla)

Quindi, si vuole massimizzare il funzionale

$$J = x(T) - \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2 dt$$

con la dinamica data dal seguente sistema differenziale (di secondo grado)

$$\begin{array}{rcll} \ddot{x}(t) & = & u(t) & \quad \text{(legge di accellerazione incognita)} \\ \dot{x}(0) & = & 0 & \\ x(0) & = & 0 & \end{array}$$

Esempio (2)

Imponendo $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ il problema può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \max \ & x_1(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u(t)^2 dt \\ & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ & \dot{x}_2(t) = u(t) \\ & x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Definizione del problema

Un problema di controllo ottimo (tempo continuo, cioè con $t \in \mathbb{R}$) è definito come

$$\begin{aligned} \max \ \ & J = \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in U, \quad \forall\ t \in [0, T] \end{aligned}$$

dove

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$
- $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

N.B. incognita dell'ottimizzazione è il vettore $u(t)$ per $t \in [0, T]$.

Percui, il problema consiste nel determinare la funzione $u(t)$ tale che $u(t) \in U$ che rende massimo il valore di J

Definizione del problema

f, ℓ e U possono dipendere esplicitamente da t e quindi il problema diviene

$$
\begin{aligned}
\max\ J &= \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(t, x(t), u(t))dt \\
\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\
x(0) &= x_0 \\
u(t) &\in U(t), \quad \forall\ t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

Definizione del problema

f, ℓ e U possono dipendere esplicitamente da t e quindi il problema diviene

$$\begin{aligned} \max\ J = \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(t, x(t), u(t))dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \\ u(t) \in U(t), \quad \forall\ t \in [0, T] \end{aligned}$$

Funzione obiettivo “aggiunta” o Lagrangiana

Dato il problema

$$
\begin{aligned}
\max\ J &= \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\
x(0) &= x_0 \\
u(t) &\in U, \quad \forall\ t \in [0, T]
\end{aligned}
$$

consideriamo la funzione “aggiunta” (o Lagrangiana)

$$
\bar{J} = J - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt
$$

e notiamo che $\bar{J} = J$ per ogni $x(t)$, $u(t)$ che soddisfano i vincoli del problema perché

$$
\dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0
$$

Funzione Hamiltoniana del problema

Dato che

$$
\begin{aligned}
\bar{J} &= J - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt \\
&= \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt \\
&= \Psi(x(T)) + \int_0^T \left[H(\lambda(t), x(t), u(t)) - \lambda(t)^\top \dot{x}(t)\right] dt
\end{aligned}
$$

dove

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = \ell(x(t), u(t)) + \lambda(t)^\top f(x(t), u(t))$$

è la funzione **Hamiltoniana** del problema

Funzione Hamiltoniana del problema

Dato che

$$
\begin{aligned}
\bar{J} &= J - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt \\
&= \Psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t)) dt - \int_0^T \lambda(t)^\top \left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right] dt \\
&= \Psi(x(T)) + \int_0^T \left[H(\lambda(t), x(t), u(t)) - \lambda(t)^\top \dot{x}(t)\right] dt
\end{aligned}
$$

dove

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = \ell(x(t), u(t)) + \lambda(t)^\top f(x(t), u(t))$$

è la funzione **Hamiltoniana** del problema